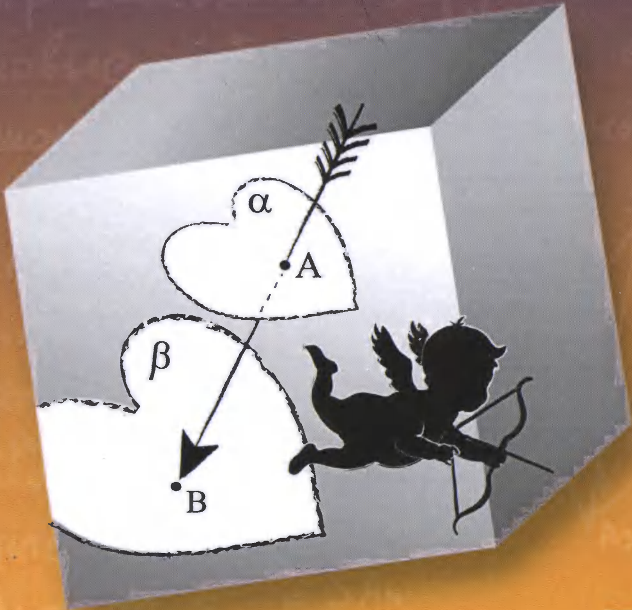
А. Х. Шахмейстер

Геометрические задачи на экзаменах

Часть 2. Стереометрия
Часть 3. Векторы



Практикум
Тренинг
Контроль

А. Х. Шахмейстер

Геометрические задачи на экзаменах

Часть 2. Стереометрия
Часть 3. Векторы

ПОСОБИЕ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ,
АБИТУРИЕНТОВ И ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ

С.-Петербург
Москва
2012

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я71.6

Редактор:

Кандидат пед. наук, доцент кафедры математики МИОО А. В. Семенов.

Рецензенты:

Доктор физ.-мат. наук, профессор МГУ Г. Ю. Ризниченко,
Заслуженный учитель РФ $\boxed{\text{Т. И. Курсиш}}$,
Заслуженный учитель РФ Е. Б. Лившиц,
Учитель высшей категории Д. М. Вайсберг,
Учитель высшей категории О. А. Войтишек.

Рекомендовано:

Московским институтом открытого образования (МИОО) и Московским центром непрерывного математического образования (МЦНМО) в качестве пособия для школьников, абитуриентов и преподавателей.

Шахмейстер А. Х.
Ш32 Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы. — СПб.: «Петроглиф» : «Виктория плюс» : М.: Издательство МЦНМО, 2012. — 488 с.: илл. — ISBN 978-5-98712-098-9, ISBN 978-5-91673-127-9, ISBN 978-5-4439-0036-0

Данное пособие предназначено для углубленного изучения школьного курса математики, содержит большое количество разноуровневого тренировочного материала. В книге представлена программа для проведения элективных курсов в профильных и предпрофильных классах. Пособие адресовано широкому кругу учащихся, абитуриентов, студентов, преподавателей.

ISBN 978-5-4439-0036-0 (Издательство МЦНМО)
ISBN 978-5-98712-098-9 (ООО «Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-127-9 (ООО «Виктория плюс»)

Посвящается памяти
Заслуженных учителей России:

Бориса Германовича Зива
Иосифа Яковлевича Веребейчика
Арона Рувимовича Майзелиса
Таисии Ивановны Курсиш
Владимира Леонидовича Ильина

Предисловие редактора

Перед вами удивительно живая, неформальная, но, в то же время, тщательно структурированная книга «Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы».

Главная цель раздела «Стереометрия» — развитие пространственного воображения, сложнейшего аспекта в изучении геометрии. Читатель идет к ней постепенно: от несложных типовых задач, к задачам-исследованиям, требующим знания элементов математического анализа.

Особенно стоит отметить игровую форму некоторых задач, использование которой резко ускоряет процесс обучения.

В разделе «Векторы» читатель знакомится с принципиально иными способами нахождения углов, расстояний, площадей и объемов на плоскости и в пространстве.

Здесь подробно рассмотрено скалярное произведение векторов, с его помощью резко упрощается решение многих планиметрических и стереометрических задач, справиться с которыми без использования скалярного произведения было бы затруднительно.

Расширяет математический инструментарий читателя и серия тренировочных работ на использование координатного и координатно-векторного методов, за которыми по традиции следуют задачи для самостоятельного решения.

Раздел «Повторение» представляет собой серию тренировочных и самостоятельных работ различного уровня сложности. Интересные разнотипные задачи касаются всех тем, рассмотренных в обоих томах «Геометрических задач на экзаменах», а несколько уровней сложности позволяют всем читателям закрепить приобретенные навыки решения геометрических задач и с уверенностью подходить к экзаменационным испытаниям.

А. В. Семенов

Предисловие автора

Предлагаемая серия книг адресована широкому кругу учащихся средних школ, классов и школ с углубленным изучением математики, абитуриентов, студентов педагогических вузов, учителей.

Книги можно использовать как самостоятельные учебные пособия (самоучители), как задачники по данной теме и как сборники дидактических материалов. Каждая книга снабжена программой элективного курса.

Для учащихся можно предложить следующую схему работы: прочитав вступление и рассмотрев примеры решения, самостоятельно решать тренировочные работы, затем посмотреть решения и, осмыслив их, попробовать решить проверочные работы, проверяя их решения по книге и т.д.

Книги полностью подходят для самостоятельного овладения той или иной темой и рассчитаны на последовательное обучение от начального уровня до уровня, необходимого абитуриентам.

Для учителей эти книги предоставляют широкий выбор приемов и методов работы:

Это могут быть задания учащимся для самостоятельной работы с последующим контролем учителя.

Возможно использование книги как задачника для работы в классе и для домашних заданий.

Эти пособия идеально подходят в качестве материала для повторения параллельно изучению других тем в школе.

Подбор материала позволяет существенно дифференцировать уровень требований к учащимся при проведении контрольных и зачетных работ.

Уровень сложности и объем материала в книгах серии, безусловно, избыточен, и учитель должен сам выбирать сложность и объем материала в соответствии с возможностями учащихся и задачами, стоящими перед ними.

А. Х. Шахмейстер

Программы элективных курсов для учащихся 10-11 классов

Элективный курс 1. Стереометрия (30 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 2	**Расстояния между геометрическими фигурами** (стр. 7 – 24) **Практикум 1**
3	**Угол между прямой и плоскостью** (стр. 25 – 30) **Задача о трех косинусах**
4 – 5	**Двугранный угол. (задача о трех синусах).** (стр. 31 – 45) **Практикум 2** (частично)
6 – 7	**Некоторые свойства пирамид. Свойство тетраэдров.** (стр. 46 – 61) **Практикум 3.**
8	**Игры-развертки.** (стр. 62 – 65)
9 – 10	**Углы в кубе. Расстояния в кубе.** (стр. 66 – 80) **Практикум 4**
11 – 12	**Углы в прямоугольном параллелепипеде.** (стр. 81 – 93) **Тренировочная работа 1** (вариант 1 (а, в, д))
13 – 14	**Тренировочная работа 2** (вариант 1 (а, в, г)) (стр. 94 – 117) **Тренировочная работа 3** (вариант 2 (а, в, г))
15	**Самостоятельная работа 1 вариант 2 (1, 3)** (стр. 118 – 119)
16 – 17	**Трехгранные углы.** (стр. 120 – 131) **Теория** (задача 2 (а-г), задача 3 (а, б))
18 – 20	**Практикум 5** (частично) (стр. 132 – 163)
20 – 24	**Сечения, углы, объемы.** (стр. 164 – 204) **Практикум 6** (1, 2) **Тренировочная работа 4** (Вариант 1 (частично)). **Задачи-исследования на сечения.**
25 – 27	**Использование математического анализа в геометрии** (стр. 205 – 224) **Практикум 7** (1, 3 (1, 2 вариант))
28 – 30	**Комбинации методов при решении задач** (стр. 225 – 236) **Тренировочная работа 5** (Вариант 1, Вариант 3 (частично), Вариант 4 (частично)). **Обобщения.**

Элективный курс 2.
Векторы. Повторение (30 уроков).

№№ уроков	Название темы В скобках указаны номера заданий
1 – 2	**Основные определения и свойства** (стр. 237 – 242)
3 – 5	**Действия над векторами** (стр. 243 – 252) **Практикум 8.** **Тренировочная работа 6** (вариант 1,самостоятельно вариант 2)
6 – 7	**Замечательные точки треугольника** (стр. 255 – 260) **и их векторные свойства** (задачи 1-5)
8	**Скалярное произведение и его свойства** (стр. 261 – 263)
9 – 10	**Векторное доказательство некоторых теорем** (стр. 264 – 270) (Теоремы 3 и 4)
11 – 15	**Использование скалярного произведения** (2, 3, 6) (стр. 271 – 319) **Практикум 10** (1(а, в), 3, 4, 6, 2 (а, в, г, д)) **Тренировочная работа 7** (вариант 2 (1, 2 (а, в, г))) **Самостоятельная работа 3** (2, 3, 4, 7) **Задача-теорема** (Косинус двухгранного угла)
16 – 19	**Координатно-векторный метод** (стр. 320 – 346) **Практикум 8** (1, 3, 4, 5) **Тренировочная работа 8** (1 (а, в), 2, 4 , 5) **Тренировочная работа 9** (вариант 1, 4)
20 – 21	**Уравнение плоскости** (стр. 348 – 356)
22 – 25	**Повторение. (стереометрия)** (стр. 392 – 418) **Итоговая задача.** **Домашняя тренировочная работа 1** (1, 2, 4, 8) **Домашняя тренировочная работа 2** (4, 7, 8, 10) **Домашняя тренировочная работа 3** (1, 3, 7)
26 – 30	**Многогранники** (стр. 426 – 475) **Домашняя тренировочная работа 4** (3, 5, 8, 9) **Домашняя тренировочная работа 5** (1, 4, 5, 6) **Задачи ловушки.** **Карточки индивидуальных заданий** (1, 3, 5, 9)

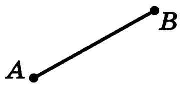
Программы разработаны по материалам книги и апробированы на практике заслуженным учителем РФ Е. Б. Лившицем.

1 Стереометрия[1]

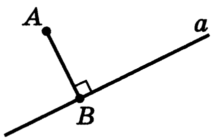
Расстояние между геометрическими фигурами

Напомним некоторые определения, связанные с понятием расстояния[2]. Заметим, что расстояние между геометрическими фигурами, как правило, обозначается буквой ρ.

1. За расстояние между двумя точками принимается длина отрезка, соединяющего эти точки: $\rho(A;B) = AB$, где ρ есть мера — число, характеризующее длину отрезка.



2. Пусть точка A не принадлежит прямой a. За расстояние между точкой A и прямой a принимается длина отрезка перпендикуляра к прямой a, проходящего через точку A: $\rho(A;a) = AB$, где $AB \perp a$ и $B \in a$.

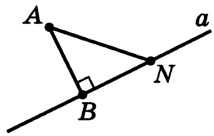


---

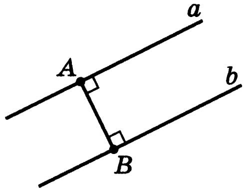
[1] Данная глава посвящена решению задач по стереометрии. Мы не будем подробно повторять весь курс геометрии, остановимся только на разделах и темах, которые вызывают наибольшие затруднения при решении задач.

[2] В школьном курсе простейшими фигурами в пространстве являются точки, прямые и плоскости.

Отметим, что для любой точки $N \in a$ $\quad AB \leqslant AN$, т. е. AB — отрезок наименьшей длины.

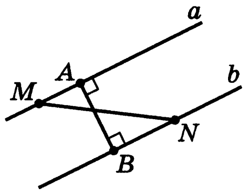


3. За расстояние между двумя параллельными несовпадающими прямыми принимается длина отрезка перпендикуляра к прямым a и b, концы которого принадлежат прямым.

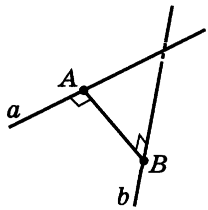


Для $a \parallel b$[3] $\rho(a;b) = AB$, где $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$.

Отметим, что для любых точек $M \in a$ и $N \in b$ $\quad AB \leqslant MN$, т. е. AB — отрезок наименьшей длины.



4. За расстояние между двумя скрещивающимися прямыми принимается длина отрезка перпендикуляра к прямым, концы которого принадлежат этим прямым.



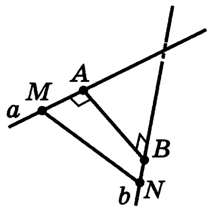
Известна теорема, утверждающая, что существует **единственная** прямая, перпендикулярная одновременно двум скрещивающимся прямым и имеющая с каждой из них общую точку.

Для $a \lambda b$[4] $\rho(a;b) = AB$, где $AB \perp a$, $AB \perp b$, $A \in a$, $B \in b$.

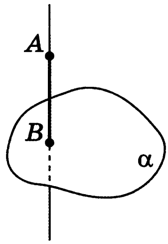
[3] См. определение параллельности в книге А. Х. Шахмейстер Часть 1. Планиметрия. СПб.: «Петроглиф». М.: МЦНМО, 2011 г. С. 11.

[4] Будем обозначать символом λ скрещивающиеся прямые.

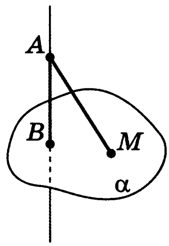
Отметим, что для любых точек $M \in a$ и $N \in b$ $AB \leqslant MN$, т. е. AB — отрезок наименьшей длины.



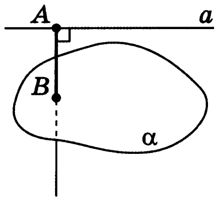
5. За расстояние между точкой вне плоскости и плоскостью принимается длина отрезка перпендикуляра к плоскости, концы которого соединяют точку вне плоскости с точкой, принадлежащей плоскости: для $A \notin \alpha$ $\rho(A;\alpha) = AB$, где $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$.



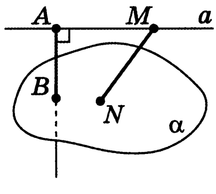
Отметим, что для любой точки $M \in \alpha$ $AB \leqslant AM$, т. е. AB — отрезок наименьшей длины.



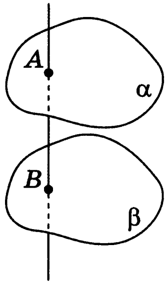
6. За расстояние между плоскостью и параллельной ей прямой принимается расстояние от произвольной точки прямой до плоскости: для $a \parallel \alpha$ $\rho(a;\alpha) = AB$, где $A \in a$, $A \notin \alpha$, $B \in \alpha$, $AB \perp \alpha$.



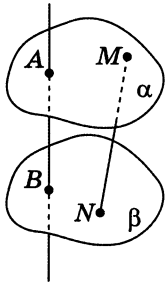
Отметим, что для любых точек $M \in a$ и $N \in \alpha$ $AB \leqslant MN$, т. е. AB — отрезок наименьшей длины.



7. За расстояние между двумя несовпадающими параллельными плоскостями принимается длина отрезка перпендикуляра к плоскостям, концы которого принадлежат разным плоскостям: для $\alpha \parallel \beta$ $\rho(\alpha;\beta) = AB$, где $A \in \alpha$, $B \in \beta$, $AB \perp \alpha$ $(AB \perp \beta)$, $\alpha \not\equiv \beta$ (не совпадают).



Отметим, что для любых точек $M \in \alpha$ и $N \in \beta$ $AB \leqslant MN$, т.е. AB — отрезок наименьшей длины.



Примечания. 1. В случаях, когда:

а) точка A совпадает с точкой B;

б) точка A лежит на прямой a;

в) точка A лежит на плоскости α;

г) параллельные прямые a и b совпадают;

д) прямая a лежит на плоскости α;

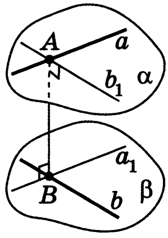
е) параллельные плоскости α и β совпадают,

расстояние между этими фигурами принимается равным нулю (эти случаи называются вырожденными).

2. Известно, что две скрещивающиеся прямые однозначно определяют пару параллельных плоскостей. Можно доказать, что расстояние между этими параллельными плоскостями равно длине общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым. Таким образом, это расстояние равно расстоянию между этими скрещивающимися прямыми.

Выполним построение, иллюстрирующее данную идею.

Пусть $a \curlywedge b$. Построим:



а) $b_1 \parallel b \quad b_1 \cap a = A \in \alpha$, где $a \subset \alpha; b_1 \subset \alpha$;

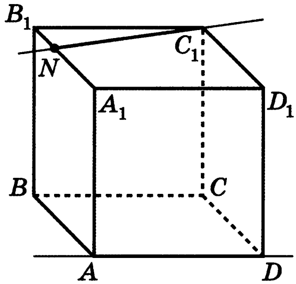
б) $a_1 \parallel a \quad a_1 \cap b = B \in \beta$, где $b \subset \beta; a_1 \subset \beta$;

в) $\alpha \parallel \beta$.

Тогда $\rho(a; b) = \rho(\alpha; \beta) = AB$, где $AB \perp \alpha$ ($AB \perp \beta$).

Всякое расстояние между данными фигурами обладает свойством быть наименьшим из всех расстояний между любыми точками, принадлежащими разным фигурам.

Задача. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. Найдите расстояние между прямой AD и прямой C_1N, где точка N принадлежит прямой A_1B_1.



а) Пусть $N \not\equiv B_1$, т. е. точка N не совпадает с точкой B_1.

Тогда прямые $AD \curlywedge C_1N$ (скрещиваются).

По определению расстояния между скрещивающимися прямыми с учетом примечания 1 получим, что

$\rho(AD; C_1N) = \rho(ABCD; A_1B_1C_1D_1) = AA_1 = \boxed{a}$.

б) Пусть $N \equiv B_1$, тогда $AD \parallel C_1B_1$. Можно доказать, что $AB_1 \perp AD$, а значит, и расстояние между этими прямыми равно $\rho(AD; C_1B_1) = AB_1$:

$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

Т. е. $\rho(AD; C_1B_1) = AB_1 = \boxed{a\sqrt{2}}$ ($AB_1 \perp AD$), как теперь очевидно.

Обратим внимание, что в случаях а) и б) из-за качественного различия видов прямых произошел чудовищный скачок в измерении расстояния. Действительно, при приближении точки N к точке B_1 даже очень близко, расстояние между AD и C_1N все еще равно a, но как только точка N и B_1 совпадут — мгновенный скачок в $\sqrt{2}$ раз — и расстояние между AD и C_1B_1 становится равным $a\sqrt{2}$.

В диалектике этот пример наглядно иллюстрирует закон перехода количества в качество и наоборот.

Теорема 1. Любая точка вне плоскости треугольника, равноудаленная от его вершин, проецируется ортогонально в центр окружности, описанной около треугольника.

Дано:

$\triangle ABC \subset \alpha$

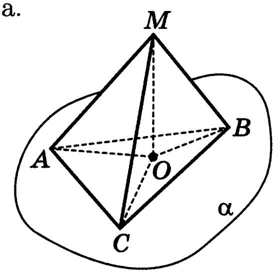
$M \notin \alpha$

$MO \perp \alpha$

$MA = MB = MC$

Докажите, что $AO = BO = CO$.

Рассмотрим вкратце идею доказательства.



Так как $\triangle AOM$, $\triangle BOM$, $\triangle COM$ прямоугольные и один катет у них общий, а гипотенузы равны, то $\triangle AOM = \triangle BOM = \triangle COM$, значит $AO = BO = CO = R_о$, где $R_о$ — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$.

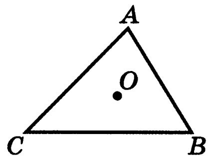
Внимание! Необходимо рассмотреть три случая:

а) $\triangle ABC$ — остроугольный, тогда O лежит внутри $\triangle ABC$.

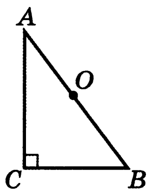
$0° < \angle C < 90°$ $\quad AB^2 < CB^2 + AC^2$

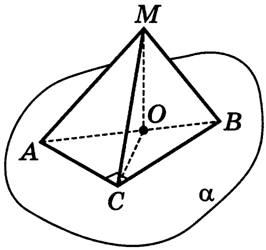
$0° < \angle A < 90°$ $\quad CB^2 < AC^2 + AB^2$

$0° < \angle B < 90°$ $\quad AC^2 < AB^2 + CB^2$

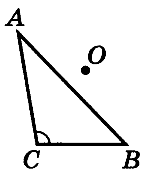


б) $\triangle ABC$ — прямоугольный, тогда точка O принадлежит гипотенузе $\triangle ABC$ ($\angle C = 90°$, $AB^2 = AC^2 + CB^2$).

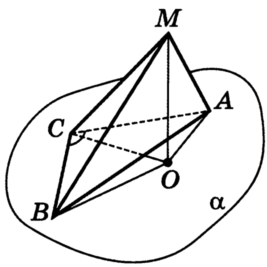




в) $\triangle ABC$ — тупоугольный, тогда O лежит вне $\triangle ABC$ ($AB^2 > AC^2 + CB^2$).



($\angle C > 90°$).

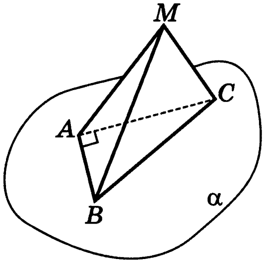


Практикум 1
(Расстояние между простейшими фигурами)

Задача 1. Катеты прямоугольного треугольника равны 42 и 56. На каком расстоянии от плоскости треугольника лежит точка, равноудаленная от его вершин на 125?

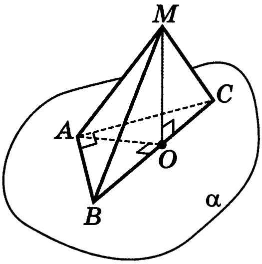
Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp AC$
$AB = 42$
$AC = 56$
$AM = BM = CM = 125$



Найдите $\rho(M; ABC)$.

Сделаем дополнительное построение:
$MO \perp ABC$, т. е. $MO = \rho(M, ABC)$.



а) $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$;

$BC = \sqrt{42^2 + 56^2} =$

$= \sqrt{1764 + 3136} = \sqrt{4900} = 70.$

Так как $AM = BM = CM$ по условию, то точка O — центр описанной окружности (по теореме 1). Значит $BO = OC = AO$.

б) Так как $AB \perp AC$ по условию, то $O \in CB$,

а значит $AO = \dfrac{1}{2}BC$; $\quad AO = 35$.

в) Рассмотрим $\triangle AMO$.

$OM = \sqrt{MA^2 - AO^2}$; $\quad OM = \sqrt{125^2 - 35^2} =$

$= \sqrt{(125 + 35)(125 - 35)} = \sqrt{160 \cdot 90} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$

Тогда $\boxed{\rho(M; ABC) = 120}$.

Задача 2. На каком расстоянии от плоскости равнобедренного треугольника находится точка, равноудаленная от каждой вершины на 13, если основание и высота треугольника равны 8?

Дано:

$\triangle ABC$

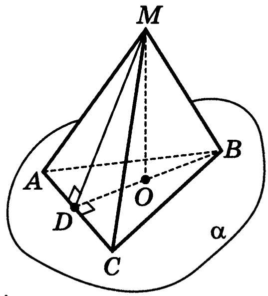
$AM = BM = CM = 13$

$AB = BC$

$BD \perp AC$

$AC = 8,\ BD = 8$

Найдите $\rho(M; ABC)$.



а) Сделаем дополнительное построение:
проведем $MO \perp ABC$, тогда $\rho(M; ABC) = MO$.

Так как $AM = BM = CM$, то O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности (по теореме 1).

Напомним формулы радиуса описанной окружности:

$$\boxed{R_{\text{о}} = \frac{abc}{4S} = \frac{a}{2\sin\alpha}}.$$

б) Рассмотрим $\triangle ABC$.

Так как $AB = BC$, то $BD = m_{AC}$,

т. е. $AD = DC = \frac{1}{2}AC = 4;\quad BC = \sqrt{DB^2 + DC^2};$

$BC = \sqrt{8^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}$.

в) $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD;\quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 8 = 32.$

г) $R_{\text{о}} = \dfrac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\triangle ABC}}.$

$R_{\text{о}} = \dfrac{8 \cdot 4\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{5}}{4 \cdot 32} = 5;\quad R_{\text{о}} = OB = 5$, где $MO \perp ABC$.

д) Из $\triangle MBO$ $\quad MO = \sqrt{MB^2 - BO^2};\quad MO = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12;$

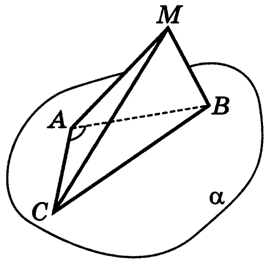
$\boxed{\rho(M; ABC) = 12}$.

Задача 3. Точка M равноудалена на расстояние $\frac{7}{3}\sqrt{3}$ от вершин треугольника, две стороны которого равны 2 и 3, а угол между ними равен $120°$. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника.

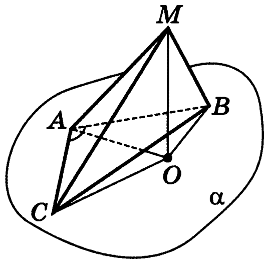
Дано:

$\triangle ABC$
$M \notin ABC$
$AM = BM = CM = \dfrac{7\sqrt{3}}{3}$
$\angle BAC = 120°$
$AB = 3$
$AC = 2$

Найдите $\rho(M; ABC)$.



а) Сделаем дополнительное построение: $MO \perp ABC$, тогда $MO = \rho(M; ABC)$. Так как $AM = BM = CM$, то O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности.



Учитывая, что $\angle BAC = 120° > 90°$, то точка O лежит вне $\triangle ABC$.

Для нахождения стороны CB используем формулу теоремы косинусов:

$$\boxed{CB = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cdot \cos\left(\widehat{AC; AB}\right)}}.$$

б) $CB = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cos 120°} = \sqrt{13 + 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{19}$
$\left(\cos 120° = -\frac{1}{2}\right)$.

в) $R_\text{о} = \dfrac{CB}{2\sin(\angle A)}$;

$$R_\text{о} = \frac{\sqrt{19}}{2\sin 120^\circ} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}} = AO \qquad \left(\sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Напомним, что $OM \perp ABC$, т. е. $\rho(M; ABC) = OM$.

г) $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2}$;

$$OM = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\sqrt{49-19}}{\sqrt{3}} = \sqrt{10};$$

$\boxed{\rho(M; ABC) = \sqrt{10}}$.

Задача 4. Расстояние от точки M до вершин треугольника равно 13. Найдите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если одна сторона его равна $3\sqrt{3}$, другая равна 4, а площадь треугольника равна $3\sqrt{3}$ кв. ед.

Дано:

$\triangle ABC$

$M \notin ABC$

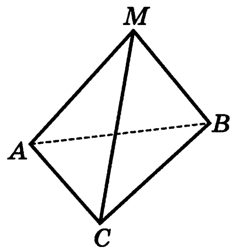
$AM = BM = CM = 13$

$AB = 3\sqrt{3}$

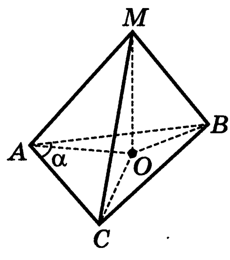
$AC = 4$

$S_{\triangle ABC} = 3\sqrt{3}$

Найдите $\rho(M; ABC)$.



а) Сделаем дополнительное построение: $MO \perp ABC$, тогда $MO = \rho(M; ABC)$. Найдем радиус описанной около треугольника окружности.



Так как $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = 3\sqrt{3}$ ($\alpha = \angle A$),

то $\dfrac{1}{2} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \sin\alpha = 3\sqrt{3}$, т. е. $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$, тогда $\left[\begin{array}{l}\alpha = 30^\circ \\ \alpha = 150^\circ\end{array}\right.$.

б) Пусть $\alpha = 30°$.

1. $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 30°}$,

т. е. $BC = \sqrt{16 + 27 - 36} = \sqrt{7}$ $\left(\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2. $R_{\text{о}} = \frac{BC}{2\sin 30°}$; $R_{\text{о}} = \frac{\sqrt{7}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{7} = OB$ $\left(\sin 30° = \frac{1}{2}\right)$.

3. $OM = \sqrt{MB^2 - OB^2}$ $(OM \perp ABC;\ \rho(M; ABC) = OM)$;

$OM = \sqrt{13^2 - 7} = \sqrt{169 - 7} = \sqrt{162} =$

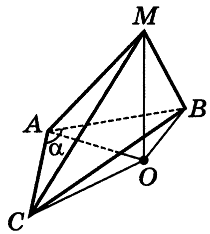
$= \boxed{9\sqrt{2}} = \rho(M; ABC)$.

в) Пусть $\alpha = 150°$.

1. $BC = \sqrt{AC^2 + AB^2 - 2AC \cdot AB \cos 150°}$,

т. е. $BC = \sqrt{16 + 27 + 36} = \sqrt{79}$

$\left(\cos 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.



2. $R_{\text{о}} = \frac{BC}{2\sin 150°}$;

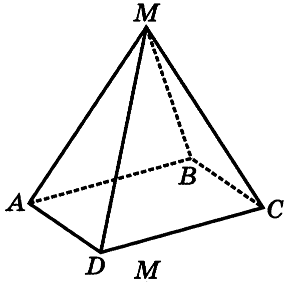
$R_{\text{о}} = \frac{\sqrt{79}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{79} = OB$ $\left(\sin 150° = \frac{1}{2}\right)$.

3. $OM = \sqrt{MB^2 - OB^2}$;

$OM = \sqrt{13^2 - \left(\sqrt{79}\right)^2} = \sqrt{169 - 79} = \sqrt{90} =$

$= \boxed{3\sqrt{10}} = \rho(M; ABC)$.

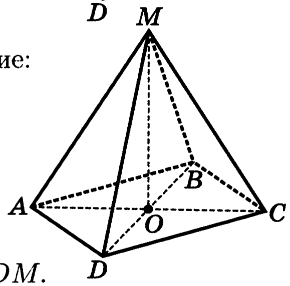
Задача 5. Точка M равноудалена на 26 от всех вершин параллелограмма со сторонами 12 и 16. Найдите расстояние от точки M до плоскости параллелограмма.



Дано:

$ABCD$ — параллелограмм
$AM = BM = CM = DM = 26$
$AB = 16$
$AD = 12$

Найдите $\rho(M; ABCD)$.



а) Сделаем дополнительное построение: $MO \perp ABCD$ $(O \in ABCD)$, тогда $MO = \rho(M; ABCD)$.

Прежде всего, уточним вид параллелограмма.

По условию $AM = BM = CM = DM$.

Так как для равных наклонных их ортогональные проекции также равны, то $AO = BO = CO = DO$, значит $ABCD$ — прямоугольник, следовательно O — центр описанной окружности. (Необходимо уметь доказывать, что в данном случае точка O есть точка пересечения диагоналей.)

б) $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2}$,
т. е. $DB = \sqrt{12^2 + 16^2} = \sqrt{144 + 256} = 20$.

в) $AO = OC = OD = OB = \dfrac{1}{2}DB$; $AO = 10$.

г) $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2}$;
$OM = \sqrt{26^2 - 10^2} = \sqrt{676 - 100} = \sqrt{576} = \boxed{24}$.

Вывод: если существует точка M, равноудаленная от вершин параллелограмма, то такой параллелограмм есть прямоугольник.

Задача 6. Точка M равноудалена от вершин трапеции, а расстояние от точки M до плоскости трапеции равно 24. Боковая сторона и диагональ, проведенная к ней в трапеции, равны соответственно 12 и 16, а большее основание трапеции равно 20.

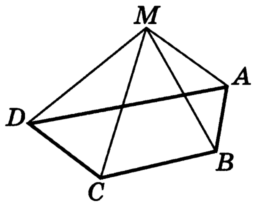
Найдите:

а) расстояние от точки M до вершин, если основание трапеции равно 20;

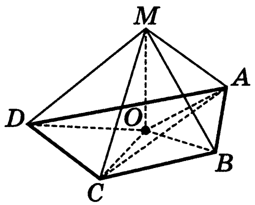
б) площадь трапеции.

Дано:

$ABCD$ — трапеция
$M \notin ABCD$
$AM = BM = CM = DM$
$\rho(M; ABCD) = 24$
$AC = 16$
$DC = 12;\ AD = 20$

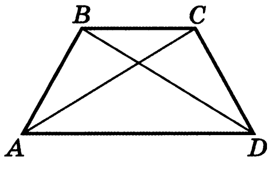


Найдите: а) AM; б) S_{ABCD}.



а) Сделаем дополнительное построение: $MO \perp ABCD$,
тогда $\rho(M; ABCD) = MO$.

1. Так как точка M равноудалена от всех вершин трапеции, то от любых трех вершин тем более. Значит, M проецируется на плоскость в центр окружности, описанной около любого треугольника, все вершины которого есть вершины трапеции.



Тогда около такой трапеции можно описать окружность. Но около трапеции можно описать окружность, только если она равнобедренная. Отсюда следует, что боковые стороны и диагонали такой трапеции равны между собой. Итак, $AB = DC$ и $AC = DB$.

2. Найдем радиус окружности, описанной около трапеции. Так как вершины треугольника жестко определяют единственную окружность, которую можно описать около треугольника, то достаточно определить радиус такой окружности, чтобы все вершины трапеции принадлежали этой окружности.

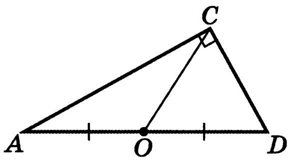
   Рассмотрим $\triangle ACD$

   Дано:

   $AC = 16$
   $DC = 12$
   $AD = 20$

   Найдите $R_о$.

   В данном случае заметим, что $AC^2 + DC^2 = AD^2$,
   т. е. $16^2 + 12^2 = 20^2$,
   значит по теореме, обратной теореме Пифагора, $AC \perp DC$,
   тогда $O \in AD$
   и $R_о = \frac{1}{2}AD = AO$,
   т. е. $R_о = 10$.

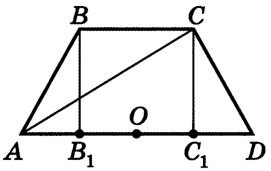


3. Из $\triangle AOM$ найдем AM.

   $AM = \sqrt{AO^2 + OM^2}$; $\quad (OM \perp AO)$
   $OM = \rho(M; ABCD)$,
   т. е. $AM = \sqrt{10^2 + 24^2} = \sqrt{100 + 576} = \sqrt{676} = \boxed{26}$.

б) 1. Для вычисления S_{ABCD} найдем высоту трапеции.

2. Проведем дополнительные построения:
   $BB_1 \perp AD$ и $CC_1 \perp AD$.



3. Используя метод площадей, найдем $CC_1 = H$.

$S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} AD \cdot CC_1 = \frac{1}{2} AC \cdot DC$

($AC \perp DC$, см. пункт 2).

Получим $AD \cdot CC_1 = AC \cdot DC$,

т. е. $20CC_1 = 16 \cdot 12$; $CC_1 = \frac{16 \cdot 12}{20} = 9{,}6$.

4. Найдем основание BC, используя метрические отношения в прямоугольном треугольнике.

Так как $AB = DC$, то $AB_1 = DC_1 = \frac{AD - BC}{2}$,

но $DC^2 = AD \cdot DC_1$ (см. книгу А. Х. Шахмейстер Планиметрия. СПб.: «Петроглиф». М.: МЦНМО, 2011. С. 93);

$12^2 = 20DC_1$; $DC_1 = 7{,}2$, значит $BC = AD - 2DC_1$,

т. е. $BC = 20 - 2 \cdot 7{,}2 = 5{,}6$.

5. $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} H_{ABCD}$ ($H_{ABCD} = CC_1 = H$),

т. е. $S_{ABCD} = \frac{20 + 5{,}6}{2} \cdot 9{,}6 = \boxed{122{,}88}$.

Задача 7. Точка M равноудалена от вершин треугольника со сторонами 17, 21 и 10 на расстояние 41,875. Найдите:

а) расстояние от точки M до плоскости треугольника;

б) расстояние от проекции точки M на плоскость этого треугольника до наибольшей стороны.

Дано:

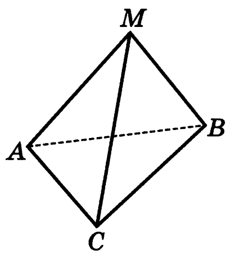
$\triangle ABC$

$M \notin ABC$

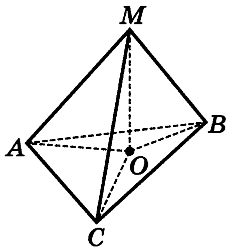
$AM = BM = CM = 41{,}875$

$AB = 17$; $AC = 10$; $BC = 21$

Найдите: а) $\rho(M; ABC)$; б) $\rho(O; BC)$.



а) Сделаем дополнительное построение: $MO \perp ABC$, тогда $MO = \rho(M; ABC)$.



1. Так как по теореме 1 точка M проецируется ортогонально в центр O окружности, описанной около треугольника ABC, то найдем вначале $R_о$.

   Формулы известны: $R_о = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.

2. Найдем площадь треугольника, используя формулу Герона: $S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

   $p = \dfrac{17+21+10}{2} = 24; \quad S_\triangle = \sqrt{24 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 14} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84.$

3. $R_о = \dfrac{17 \cdot 21 \cdot 10}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \dfrac{85}{8} = 10\dfrac{5}{8} = 10{,}625 = AO.$

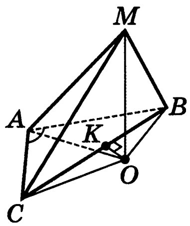
   Для того чтобы убедиться в верности чертежа, проверим вид $\triangle ABC$.

   $\cos(\angle A) = \dfrac{AC^2 + AB^2 - CB^2}{2 \cdot AC \cdot AB}$;

   $\cos(\angle A) = \dfrac{10^2 + 17^2 - 21^2}{2 \cdot 10 \cdot 17} = -\dfrac{52}{2 \cdot 10 \cdot 17} < 0,$

   значит $\angle A > 90°$.

   Чертеж будет иметь другой вид:



4. $OM = \sqrt{AM^2 - AO^2}$; $\left(41{,}875 = 41\frac{7}{8} = \frac{335}{8}\right)$

$$OM = \sqrt{(41{,}875)^2 - \left(\frac{85}{8}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{335}{8}\right)^2 - \left(\frac{85}{8}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(335+85)(335-85)} = \frac{\sqrt{420 \cdot 250}}{8} = \frac{50}{8}\sqrt{42} =$$

$$= \boxed{\frac{25}{4}\sqrt{42}} = 6{,}25\sqrt{42}.$$

б) 1. Пусть $OK \perp CB$, тогда $OK = \rho(O; BC)$.

Так как $OC = OB = R_{\text{о}} = 10\frac{5}{8}$

($\triangle OCB$ — равнобедренный),

то $CK = KB = \frac{1}{2}CB = 10{,}5$ (OK — медиана $\triangle OCB$).

2. $OK = \sqrt{OB^2 - KB^2}$;

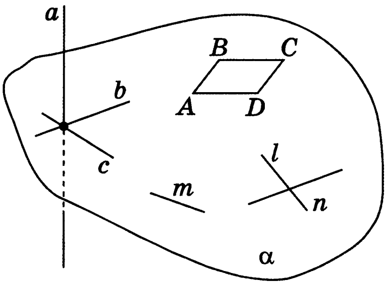
$$OK = \sqrt{\left(\frac{85}{8}\right)^2 - \left(\frac{21}{2}\right)^2} = \frac{1}{8}\sqrt{85^2 - 84^2} =$$

$$= \frac{1}{8}\sqrt{(85+84)(85-84)} = \frac{1}{8}\sqrt{169 \cdot 1} = \frac{13}{8} =$$

$$= \boxed{1{,}625} = \rho(O; BC).$$

Угол между прямой и плоскостью

<u>Определение 1.</u> Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой плоскости.



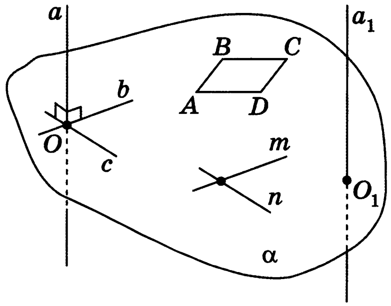
Вопрос. Если прямая перпендикулярна плоскости, т. е. $a \perp \alpha$, то можно ли утверждать, что прямая a перпендикулярна следующим прямым, показанным на чертеже:

$a \perp c$; $a \perp b$; $a \perp AB$; $a \perp BC$; $a \perp AD$; $a \perp DC$; $a \perp l$; $a \perp n$ и т. д.?

Ответ. Да, так как по определению, если прямая перпендикулярна плоскости, то значит она перпендикулярна любой прямой плоскости, в том числе и перечисленным.

Примечание. Рассмотренное определение перпендикулярности прямой к плоскости в практическом плане трудно применимо, так как все прямые плоскости на перпендикулярность невозможно проверить. Поэтому необходимо рассмотреть более простой (конечный) критерий перпендикулярности прямой плоскости.

Теорема 1. Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, необходимо и достаточно, чтобы существовали две пересекающиеся прямые, принадлежащие плоскости, перпендикулярные данной прямой (см. с. 30).



Вопросы

а) Если $\begin{cases} a \notin \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \end{cases}$, где прямые b и c — пересекающиеся, то можно ли утверждать, что тогда прямая a перпендикулярна прямым, показанным на чертеже: AB; BC; DC; AD; m; n?

б) Если $\begin{cases} a \notin \alpha;\ a_1 \notin \alpha \\ a \perp b \\ a \perp c \\ a_1 \parallel a \end{cases}$, где прямые b и c пересекающиеся, то можно ли утверждать, что прямая a_1 перпендикулярна прямым на чертеже: b; c; m; n; AB; BC; AD; DC?

Ответы

а) Да. Так как из условий по теореме следует, что прямая $a \perp \alpha$, то по определению перпендикулярности прямой плоскости следует, что прямая a перпендикулярна любым прямым плоскости α, в том числе и перечисленным.

б) Да. Так как $a_1 \parallel a$ и $a \perp \alpha$, то по теореме: если одна из параллельных прямых перпендикулярна плоскости, то и другая прямая перпендикулярна плоскости. Отсюда следует, что $a_1 \perp \alpha$. Тогда, проводя по аналогии рассуждения из пункта а), получим, что прямая a_1 перпендикулярна прямым b; c; m; n; AB; BC; AD; DC.

Примечания. 1. Учтем, что за угол между скрещивающимися прямыми **по определению** принимается нетупой угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным прямым. Тогда становится ясно, почему в формулировке теоремы отсутствует обязательное требование совпадения точки пересечения прямой с плоскостью (с точкой пересечения пересекающихся прямых, перпендикулярных данной прямой), т. е. если

$$\begin{cases} a \perp m \\ a \perp n \\ m \cap n \neq \emptyset, \quad (\text{т. е. } m, n \text{ — пересекающиеся}) \end{cases},$$

то $a \perp \alpha$ $(m, n \in \alpha;\ m \parallel b,\ n \parallel c$, см. чертеж).

2. Требование о том, чтобы прямые, перпендикулярные прямой a, были **пересекающимися**, принципиальное, так как если бы прямые b и c были параллельными, то прямая a могла бы быть не перпендикулярна плоскости.

<u>Определение 2.</u> Прямая, пересекающая плоскость и неперпендикулярная ей, называется наклонной.

Теорема 2 (о трех перпендикулярах). Для того чтобы прямая, принадлежащая плоскости, была перпендикулярна наклонной к плоскости, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной на плоскость.

Достаточность

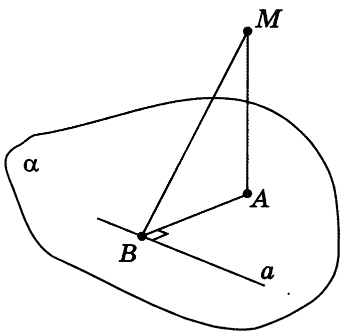
Дано:

$MA \perp \alpha$; MB — наклонная

$AB = \text{Пр}_{\perp\alpha}(MB)$ — ортогональная проекция MB на плоскость α

$AB \perp a$, $a \in \alpha$

$a \perp MB$



Доказательство:

а) $a \perp AB$ (по условию).

б) $MA \perp \alpha$ по условию, тогда $MA \perp a$ (по определению).

в) Значит по теореме о необходимых и достаточных условиях перпендикулярности прямой к плоскости следует, что прямая a перпендикулярна плоскости ABM, т.е. $a \perp ABM$.

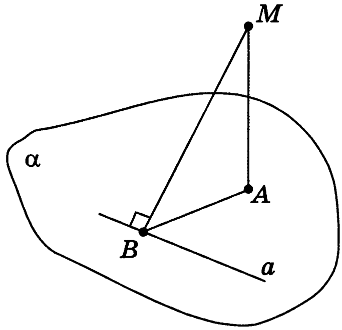
г) Из того, что $a \perp ABM$, следует, что $a \perp MB$, что и требовалось доказать.

Необходимость

Дано:

$MA \perp \alpha$; MB — наклонная
$MB \perp a$, где $a \in \alpha$
$AB = \text{Пр}_{\perp\alpha}(MB)$ — ортогональная проекция MB на плоскость α

$a \perp AB$



Доказательство проведите по аналогии с предыдущим доказательством самостоятельно.

<u>Определение 3.</u> Углом между наклонной и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость. Угол измеряется в градусах и изменяется от 0° до 90°.

Отметим, что ортогональное проецирование есть проецирование вдоль прямой, перпендикулярной плоскости проекции (частный случай параллельного проецирования).

В дальнейшем под проекцией будем понимать ортогональную проекцию, если иное специально не оговорено.

Свойство угла между прямой и плоскостью. Угол φ_0 между прямой и плоскостью является наименьшим из всех углов, которые она образует с любой прямой плоскости.

Доказательство

а) Пусть $MB \perp \alpha$ (дополнительное построение).

$AM \cap \alpha = A$, где AM — наклонная;

$\left(\widehat{AM;\alpha}\right) = \angle MAB = \varphi_0$.

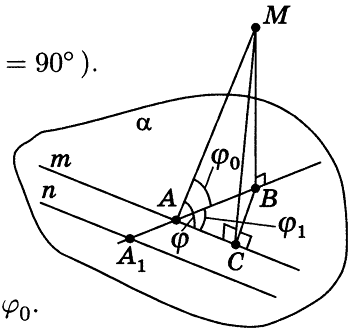
б) Рассмотрим произвольную прямую m,
причем $A \in m$, а $B \notin m$.
Пусть $BC \perp AC$, где $C \in m$ (доп. построение),
значит $\text{Пр}_{\perp\alpha}(MC) = BC$.

в) Тогда по теореме о трех перпендикулярах $MC \perp AC$.

г) Рассмотрим $\triangle CMB$.
Для него $MC > MB$ $(\angle MBC = 90°)$.
Так как

$$\left.\begin{array}{ll} \text{в } \triangle AMB & \sin\varphi_0 = \dfrac{MB}{AM} \\ \text{в } \triangle AMC & \sin\varphi = \dfrac{MC}{AM} \end{array}\right|,$$

то $\dfrac{MC}{AM} > \dfrac{MB}{AM}$, т. е. $\sin\varphi > \sin\varphi_0$.



Учитывая, что тригонометрическое отношение (функция) синус строго возрастает на $(0°; 90°)$, получим, что $\varphi > \varphi_0$, т. е. φ_0 — наименьший угол.

Примечания. 1. Если рассматривать любую прямую $n \in \alpha$, такую, что $n \parallel m$, то $\left(\widehat{m; AM}\right) = \left(\widehat{n; AM}\right) = \varphi$. Значит свойство справедливо для любой прямой плоскости α и наклонной к ней, что и требовалось доказать.

2. Мера угла обозначается $\rho(\angle A)$, т. е. так же, как и мера расстояния между фигурами. Только в геометрии принято измерять углы в градусной мере, например: $\rho(\angle A) = 45°$, $\rho\left(\widehat{AC; MB}\right) = 80°$, $\rho\left(\widehat{AB; MA}\right) = \rho(\varphi_0) = 60°$, $\rho\left(\widehat{MB; \alpha}\right) = \rho(\varphi_0) = 20°$.

В ряде случаев, когда понятно, о чем идет речь, символ меры по умолчанию опускается (не пишется). Так, по умолчанию равенство $\left(\widehat{MB; \alpha}\right) = \varphi_0$ означает равенство значений величин этих углов.

Задача 1 (о трех косинусах). Пусть $\left(\widehat{AM;\alpha}\right) = \varphi_0$, где $MB \perp \alpha$, $\left(\widehat{AM;AC}\right) = \varphi$, $\left(\widehat{AB;AC}\right) = \varphi_1$ (см. рис. на с. 29). Докажем, что $\cos\varphi = \cos\varphi_0 \cos\varphi_1$.

Пусть $AM = a$; $BC \perp AC$ (см. чертеж на с. 29).

а) Рассмотрим $\triangle AMB$: $AB = AM\cos\varphi_0 = a\cos\varphi_0$.

б) Рассмотрим $\triangle ABC$: $\underline{AC} = AB\cos\varphi_1 = a\cos\varphi_0\cos\varphi_1$.

в) Рассмотрим $\triangle AMC$: $\underline{AC} = AM\cos\varphi = a\cos\varphi$ (по теореме о трех перпендикулярах $MC \perp AC$),

значит $a\cos\varphi = a\cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi_1$,

т. е. $\boxed{\cos\varphi = \cos\varphi_0\cos\varphi_1}$, что и требовалось доказать.

Напоминание

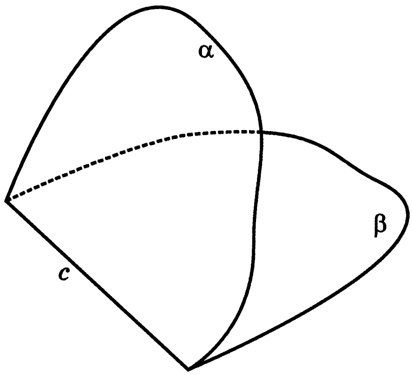
Если из истинности утверждения A следует истинность утверждения B (записывают это так: $(A$ — И$) \Rightarrow (B$ — И$)$), то говорят, что истинность утверждения A *достаточна* для истинности утверждения B, а истинность утверждения B *необходима* для истинности утверждения A.

Можно сказать иначе: истинность утверждения A есть *признак* истинности утверждения B, а истинность B есть *свойство* истинности A.

Более подробно см. книгу А. Х. Шахмейстер Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. СПб.:-М.: 2011. С. 114.

Двугранный угол

<u>Определение 1.</u> Под двугранным углом мы будем понимать выпуклую часть пространства, ограниченную двумя полуплоскостями с общей границей этих полуплоскостей.



Общая граница полуплоскостей называется ребром двугранного угла, а образующие полуплоскости — гранями двугранного угла.

Примечания. 1. Часть пространства называется выпуклой, если для любых двух точек, принадлежащих этой части пространства, следует, что любые точки отрезка, соединяющего эти две точки, также принадлежат этой части пространства.

2. Обычно обозначение двугранного угла связано с точным указанием ребра и полуплоскостей $\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)$, или $\angle A\underline{BC}D$, где $\underline{BC}$ — ребро, ABC и BCD — полуплоскости с границей BC.

<u>Определение 2.</u> Линейным, или плоским углом двугранного угла называется <u>пересечение</u> двугранного угла плоскостью, перпендикулярной его ребру.

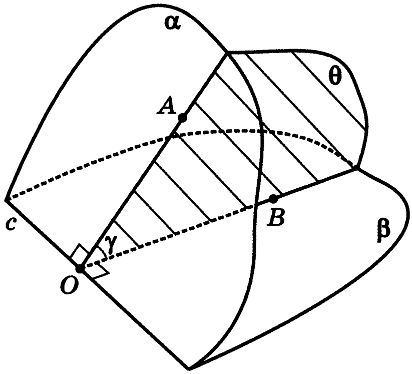
Обозначим такую плоскость θ.

<u>Определение 3.</u> За меру двугранного угла принимается мера его линейного или плоского угла.

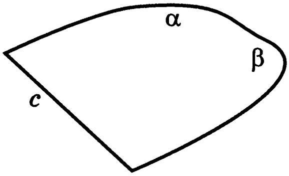
$$\rho\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)=\rho\left(\widehat{[OA);[OB)}\right)=\rho(\angle AOB)=\rho(\gamma),$$

где $[OA)=\alpha\cap\theta$ **и** $[OB)=\beta\cap\theta$ $(\angle AOB=\gamma,\ c\perp\theta)$.

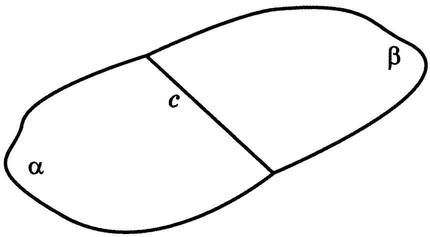
Мера угла $\angle AOB$, как правило, измеряется в градусах.



Отметим, что в содержательном смысле $0<\gamma<180^\circ$. При $\gamma=0$ полуплоскости совпадают: $\alpha=\beta$.



При $\gamma=180^\circ$ полуплоскости образуют плоскость.



Примечания. 1. $0 \leqslant \gamma \leqslant 180^\circ$ — по смыслу означает выпуклость двугранного угла.

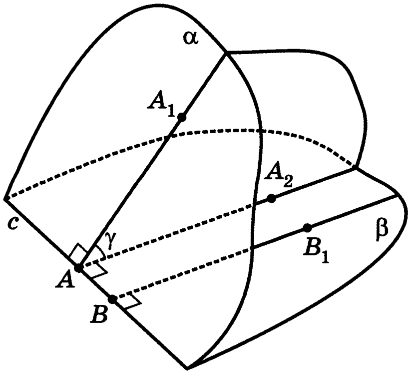
2. Иногда за меру двугранного угла принимается мера угла между лучами, перпендикулярными к ребру двугранного угла, лежащими в разных гранях (полуплоскостях) двугранного угла. В известном смысле такой подход более общий, так как включает и случаи скрещивающихся прямых, которым принадлежат перпендикулярные к ребру двугранного угла лучи.

Например $[AA_1) \lambda [BB_1)$.

Тогда $\rho\left(\widehat{\alpha;\beta}\right) =$

$= \rho\left(\widehat{[AA_1);[BB_1)}\right) =$

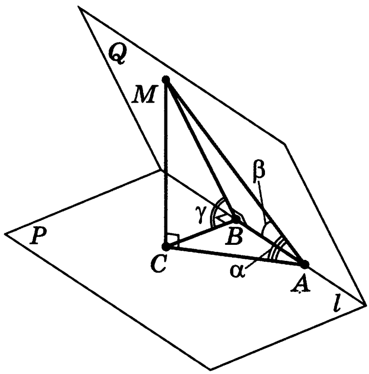
$= \rho(\angle A_1\underline{AB}B_1)$.



Задача 2 (о трех синусах). Даны плоскости P и Q. $P \cap Q = l$. $AM \in Q$, $A \in l$; $MB \perp AB$, $B \subset l$; $MC \perp P$, $C \in P$; $\rho\left(\widehat{AM;l}\right) = \beta$; $\rho\left(\widehat{P;Q}\right) = \gamma$; $\underline{\rho\left(\widehat{AM;P}\right) = \alpha}$.

Докажите $\boxed{\sin\alpha = \sin\beta\sin\gamma}$.

а) Пусть $AM = a$.
Из $\triangle MAB$
$MB = AM\sin\beta = a\sin\beta$.
Из $\triangle MCB$
$\underline{MC} = MB\sin\gamma = a\sin\beta\sin\gamma$.
Из $\triangle MAC$
$\underline{MC} = AM\sin\alpha = a\sin\alpha$.



б) Значит $a\sin\alpha = a\sin\beta\sin\gamma$, т. е. $\boxed{\sin\alpha = \sin\beta\sin\gamma}$, что и требовалось доказать.

Практикум 2 (Углы между прямой и плоскостью, двугранные углы)

Задача 1. Прямоугольный треугольник повернут относительно одного из катетов на угол в $90°$. При этом гипотенуза повернулась на угол в $60°$.

Найдите:

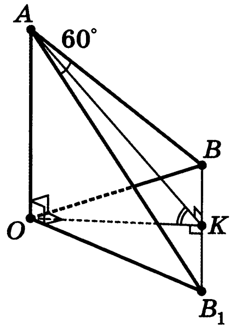
а) угол между плоскостью, которой принадлежит треугольник, образованный поворотом гипотенузы, и плоскостью, которой принадлежит треугольник, образованный поворотом катета;

б) угол между катетом, являющимся осью вращения (поворота) и плоскостью треугольника поворота гипотенузы;

в) угол между плоскостью базового прямоугольного треугольника и плоскостью треугольника поворота гипотенузы.

Дано:

$\triangle AOB,\ \triangle AOB_1$
$\triangle AOB = \triangle AOB_1$
$AO \perp OB$
$\angle BOB_1 = 90°$
$\angle BAB_1 = 60°$



Найдите:

а) $\rho\left(\widehat{BOB_1; BAB_1}\right)$;

б) $\rho\left(\widehat{OA; ABB_1}\right)$;

в) $\rho\left(\widehat{AOB; BAB_1}\right)$.

а) Найдем $\rho\left(\widehat{BOB_1; BAB_1}\right)$.

1. $\left.\begin{matrix} OA \perp OB \\ OA \perp OB_1 \end{matrix}\right|$ по условию, тогда $OA \perp BOB_1$.

Сделаем доп. построение: $OK \perp BB_1$.

Так как $OA \perp BOB_1$, то по теореме о трех перпендикулярах $AK \perp BB_1$. $\left.\begin{matrix} OK \perp BB_1 \text{ (по построению)} \\ AK \perp BB_1 \text{ (по доказанному)} \end{matrix}\right|$,

значит $BB_1 \perp AKO$, т. е. $\rho\left(\widehat{BOB_1; BAB_1}\right) = \rho(\angle AKO)$.

2. Рассмотрим $\triangle BOB_1$.

$\left.\begin{array}{l} OB_1 = OB \\ OB_1 \perp OB \end{array}\right|$, значит $\angle OB_1B = \angle OBB_1 = 45^\circ$

и $OK = BK = B_1K$ (по свойству перпендикуляра в равнобедренном треугольнике).

Положим $OB = a$, тогда $OK = OB\sin 45^\circ$, $OK = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$BB_1 = \sqrt{OB^2 + OB_1^2}$, $BB_1 = a\sqrt{2}$.

3. Рассмотрим $\triangle BAB_1$.

$\left.\begin{array}{l} AB = AB_1 \\ \angle BAB_1 = 60^\circ \end{array}\right|$,

значит $\angle BB_1A = \angle B_1BA = 60^\circ$; $AB = AB_1 = BB_1$.

4. $\triangle BOB_1 = \triangle BOA$ (по катету и гипотенузе).

$\angle ABO = 45^\circ$ $(OB = OB_1 = OA)$,

значит $\triangle AOB$ — равнобедренный.

$AK = AB\sin 60^\circ$, $AK = a\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}$.

5. Рассмотрим $\triangle AOK$.

$OA \perp BOB_1$ (по доказанному), значит $OA \perp OK$.

$\cos(\angle AKO) = \dfrac{OK}{AK}$,

т. е. $\cos(\angle AKO) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

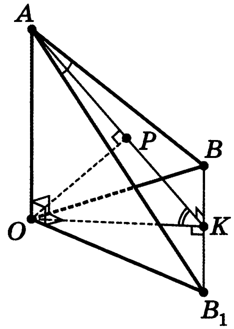
$\rho(\angle AKO) = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Значит $\rho\left(BO\widehat{B_1;B}AB_1\right) = \rho(\angle AKO) = \boxed{\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{3}}$.

Заметим, что по умолчанию равенство без символов меры ρ — $\left(BO\widehat{B_1;B}AB_1\right) = \angle AKO$ — означает равенство **значений** этих углов.

б) Найдем $\left(\widehat{OA; ABB_1}\right)$.

За угол между прямой, не перпендикулярной плоскости, и плоскостью принимается острый угол между прямой и ее ортогональной (перпендикулярной) проекцией на плоскость.



1. Дополнительное построение: $OP \perp AK$.

   Так как $BB_1 \perp AKO$ (по доказанному), то $BB_1 \perp OP$ (прямая плоскости AKO).

   $\left.\begin{array}{l} OP \perp AK \text{ (по построению)} \\ OP \perp BB_1 \text{ (по доказанному)} \end{array}\right|,$

   отсюда следует, что $OP \perp BAB_1$.

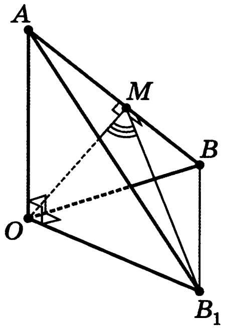
   Тогда $\left(\widehat{OA; ABB_1}\right) = \angle OAP$, но $\angle OAP = \angle OAK$.

2. Из $\triangle AOK$:

   $$\sin(\angle OAK) = \frac{OK}{AK}, \text{ т. е. } \sin(\angle OAP) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

   значит $\left(\widehat{OA; ABB_1}\right) = \angle OAP = \boxed{\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}}$.

в) Найдем $\left(\widehat{AOB; BAB_1}\right)$.



По сути, в данной задаче необходимо найти величину двугранного угла $\angle O\underline{AB}B_1$.

1. Проведем дополнительное построение $OM \perp AB$. Так как $AO = BO$, то $AM = BM$.

   Так как $\triangle BAB_1$ — равносторонний, то B_1M — медиана, высота и биссектриса $\triangle BAB_1$.

   $\left.\begin{array}{l} OM \perp AB \text{ (по построению)} \\ B_1M \perp AB \text{ (по доказанному)} \end{array}\right|,$

   значит $AB \perp OMB_1$, тогда $\rho(\angle O\underline{AB}B_1) = \rho(\angle OMB_1)$.

2. $B_1M = BB_1 \sin 60°$, т. е. $B_1M = a\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   $OM = OB \sin 45°$, т. е. $OM = a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Рассмотрим $\triangle OMB_1$:

   $$\cos(\angle OMB_1) = \frac{OM^2 + B_1M^2 - OB_1^2}{2OM \cdot B_1M};$$

   $$\cos(\angle OMB_1) = \frac{\frac{1}{2}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - a^2}{2 \cdot a\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot a\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

   $$\left(\widehat{AOB; BAB_1}\right) = \angle OMB_1 = \boxed{\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

Задача 2. Катеты прямоугольного треугольника образуют с плоскостью P, которой принадлежит гипотенуза, углы α и β соответственно. Найдите угол между плоскостью прямоугольного треугольника и плоскостью P.

Дано:

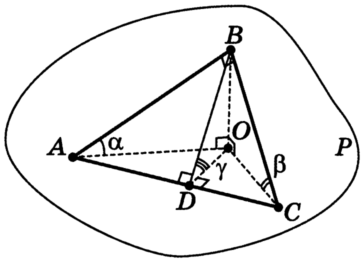
$\triangle ABC$

$AB \perp BC$

$\left(\widehat{AB;P}\right) = \alpha$

$\left(\widehat{BC;P}\right) = \beta$

Найдите $\left(\widehat{ABC;P}\right)$.



а) 1. Проведем дополнительное построение: $BO \perp P$, $O \in P$.

2. Пусть $BD \perp AC$. Так как $BO \perp AOC$, то по теореме о трех перпендикулярах $OD \perp AC$.

3. $BD \perp AC$ (по построению). $OD \perp AC$ (по доказанному), отсюда следует, что $AC \perp BDO$.

4. Так как $BO \perp AOC$, то $BO \perp DO$ и $\sin(\angle BDO) = \dfrac{OB}{DB}$.

б) Перейдем к дополнительным расчетам. Положим $BO = a$.

1. Из $\triangle AOB$: $AB = \dfrac{OB}{\sin\alpha}$; $AB = \dfrac{a}{\sin\alpha}$;

2. Из $\triangle COB$: $BC = \dfrac{OB}{\sin\beta}$; $BC = \dfrac{a}{\sin\beta}$;

3. Из $\triangle ABC$: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$;

$$AC = \sqrt{\frac{a^2}{\sin^2\alpha} + \frac{a^2}{\sin^2\beta}} = \frac{a\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}{\sin\alpha\sin\beta};$$

4. Из $\triangle ABC$, используя метод площадей, получим:

$AB \cdot BC = AC \cdot BD = 2S_{\triangle ABC}$, значит $BD = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$;

$$BD = \frac{\frac{a}{\sin\alpha} \cdot \frac{a}{\sin\beta}}{\frac{a\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}{\sin\alpha\sin\beta}} = \frac{a}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}.$$

в) Из $\triangle BDO$: $\sin(\angle BDO) = \dfrac{OB}{BD}$;

$$\sin(\angle BDO) = \frac{a}{\frac{a}{\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta};$$

$$\sin(\angle BDO) = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta},$$

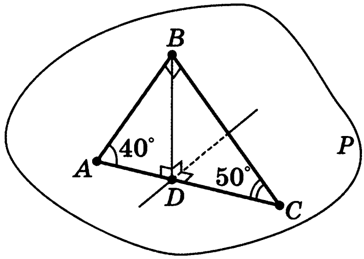
тогда $\sin^2(\angle BDO) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta$ — своеобразная теорема Пифагора для синусов, т. е. $\boxed{\sin^2\gamma = \sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

Примечание. Если $\alpha + \beta = 90°$, то
$\sin^2(\angle BDO) = \sin^2\alpha + \sin^2(90° - \alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$,
значит $\sin(\angle BDO) = 1$.

Отсюда следует, что $\angle BDO = 90°$. Геометрически это означает, что $ABC \perp AOC$, что, если честно, мы должны были заметить заранее и выделить этот случай отдельно при проведении доп. построений. Например:

Дано:
$\left(\widehat{AB; P}\right) = 40°$
$\left(\widehat{BC; P}\right) = 50°$
$AB \perp BC$

Докажите $(ABC \perp P)$.



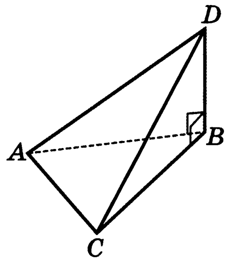
Задача 3. Дана треугольная пирамида $DABC$. Стороны треугольного основания пирамиды равны соответственно 24, 21 и 15. Боковое ребро, исходящее из вершины наименьшего угла треугольного основания, равно 12 и перпендикулярно основанию пирамиды. Найдите:

а) наибольшую площадь боковой грани;

б) расстояние от вершины наименьшего угла треугольника основания до противолежащей боковой грани;

в) угол между наибольшим боковым ребром и плоскостью грани наименьшей площади.

Так как для $\triangle ABC$ против наименьшей стороны лежит наименьший угол, то пусть $\angle ABC$ — наименьший, тогда $H_{DABC} = DB$ и $DB \perp ABC$ (по условию).



Дано:
$DABC$ — пирамида
$AB = 24$
$BC = 21$
$AC = 15$
$H_{DABC} = 12$

а) Найдите $S_{\text{наиб. б. грани}}$.

б) Найдите $\rho(B; ADC)$.

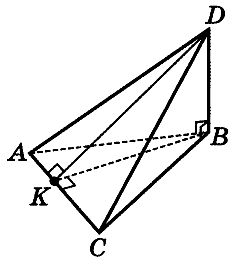
в) Необходим анализ данных, чтобы точно сформулировать данный вопрос задачи.

а) 1. Найдем вначале площади:

$$S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} AB \cdot DB, \quad S_{\triangle ADB} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 12 = \underline{144};$$

$$S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} CB \cdot DB, \quad S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 12 = \underline{126}.$$

2. Для того чтобы рационально найти $S_{\triangle ADC}$, проведем доп. построение.



Пусть $BK \perp AC$. Так как $DB \perp ABC$, то по теореме о трех перпендикулярах $DK \perp AC$.

Используя теорему Герона, вычислим

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$p = \dfrac{24+21+15}{2} = 30$;

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{30 \cdot 6 \cdot 9 \cdot 15} = 6 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} = \underline{90\sqrt{3}}$.

С другой стороны, $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot BK \cdot AC$,

тогда $BK = \dfrac{2 \cdot S_{\triangle ABC}}{AC}$; $\quad BK = \dfrac{2 \cdot 90\sqrt{3}}{15} = 12\sqrt{3}$.

Так как $DB \perp ABC$, то $DB \perp BK$.

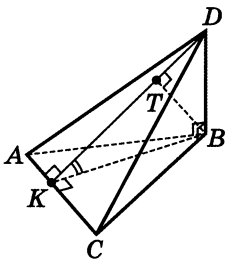
Тогда $DK = \sqrt{BK^2 + DB^2}$;

$DK = \sqrt{\left(12\sqrt{3}\right)^2 + 12^2} = 24$.

$S_{\triangle ADC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot DK$; $\quad S_{\triangle ADC} = \dfrac{1}{2} \cdot 15 \cdot 24 = \underline{180}$,

значит $S_{\text{наиб. б. грани}} = S_{\triangle ADC} = \boxed{180}$ (кв. ед.).

б) $\rho(B; ADC) = ?$



1. Проведем доп. построение $BT \perp DK$.
   Учитывая, что
   $\left.\begin{array}{l} BK \perp AC \text{ (по построению)} \\ DK \perp AC \text{ (по доказанному)} \end{array}\right|,$
   получим $AC \perp BDK$.

2. Так как $AC \perp BDK$, то $AC \perp BT$;
   $\left.\begin{array}{l} BT \perp DK \text{ (по построению)} \\ BT \perp AC \text{ (по доказанному)} \end{array}\right|,$
   значит $BT \perp ADC$, т. е. $\rho(B; ADC) = BT$.

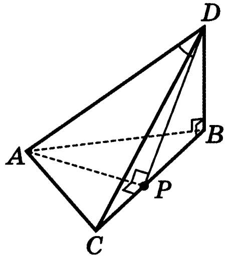
3. Из $\triangle DBK$, используя метод площадей, получим:
   $2S_{\triangle DBK} = DB \cdot BK = DK \cdot BT$; $\quad BT = \dfrac{DB \cdot BK}{DK}$;
   $BT = \dfrac{12 \cdot 12\sqrt{3}}{24} = 6\sqrt{3}$, т. е. $\rho(B; ADC) = \boxed{6\sqrt{3}}$.

в) Проанализируем данные.

AD — очевидно, наибольшее боковое ребро.

DBC — грань, наименьшая по площади (см. пункт а).

Значит, необходимо найти $\left(\widehat{AD; DBC}\right)$.



1. $AP \perp BC$.

Так как $DB \perp ABC$, то $DB \perp AP$, тогда

$\left.\begin{array}{l} AP \perp BC \text{ (по условию)} \\ AP \perp DB \text{ (по доказанному)} \end{array}\right|$, значит $AP \perp DBC$.

Так как $AP \perp DBC$, то $AP \perp DP$.

Из $\triangle ADP$: $\left(\widehat{AD; DBC}\right) = \angle ADP$.

2. Из $\triangle ABC$: $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} AP \cdot BC$, тогда $AP = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$,

т. е. $AP = \dfrac{2 \cdot 90\sqrt{3}}{21} = \dfrac{60}{7}\sqrt{3}$.

Из $\triangle ADB$: $AD = \sqrt{DB^2 + AB^2}$,

т. е. $AD = \sqrt{12^2 + 24^2} = 12\sqrt{5}$.

$\sin(\angle ADP) = \dfrac{AP}{AD}$,

т. е. $\sin(\angle ADP) = \dfrac{\frac{60}{7}\sqrt{3}}{12\sqrt{5}} = \dfrac{5}{7}\sqrt{\dfrac{3}{5}} = \dfrac{\sqrt{15}}{7}$,

тогда $\left(\widehat{AD; DBC}\right) = \boxed{\arcsin\left(\dfrac{\sqrt{15}}{7}\right)}$.

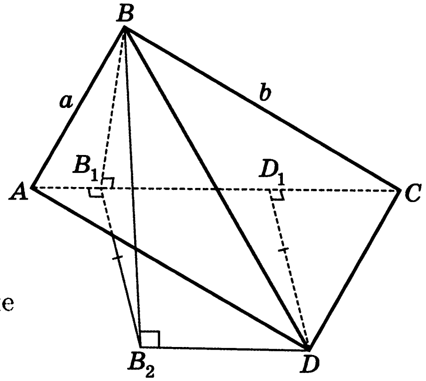
Примечание. Любопытно отметить, что здесь $\left(\widehat{ADP; ABC}\right) = \angle D\underline{PA}B = \angle DPB$.

Задача 4. Прямоугольник со сторонами, равными a и b ($b \geqslant a$), перегнули по диагонали, причем полуплоскости полученных прямоугольных треугольников образуют двугранный угол φ. Найдите расстояние между вершинами прямоугольника, не лежащими на диагонали сгиба.

Дано:

$\left.\begin{array}{l} ABCD \text{ — пирамида} \\ AC \text{ — линия сгиба} \\ \left(\widehat{ABC;ADC}\right) = \varphi \end{array}\right|$

Найдите BD.



а) Сделаем дополнительные построения.

1. $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp AC \\ DD_1 \perp AC \end{array}\right| \Rightarrow \left(\widehat{BB_1;DD_1}\right) = \angle B\underline{AC}D.$

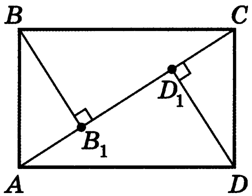
2. $\left.\begin{array}{l} B_1B_2 \perp AC \\ B_1B_2 = DD_1 \end{array}\right| \Rightarrow \left\| \begin{array}{l} B_1B_2 \parallel DD_1 \\ DB_2 = B_1D_1 \end{array}\right.,$

т. е. $B_1B_2DD_1$ — прямоугольник.

3. Так как $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp AC \text{ (по построению)} \\ B_1B_2 \perp AC \text{ (по построению)} \end{array}\right|,$

то $\left.\begin{array}{l} AC \perp BB_1B_2 \\ DB_2 \parallel AC \end{array}\right|$, значит $DB_2 \perp BB_1B_2 \Rightarrow DB_2 \perp BB_2$.

б)



1. $BB_1 = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$ (метод площадей);

$BB_1 = \dfrac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (очевидно $BB_1 = DD_1$).

2. $AB_1 = \sqrt{AB^2 - BB_1^2}$;

$$AB_1 = \sqrt{a^2 - \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (AB_1 = CD_1).$$

3. $B_1D_1 = AC - 2AB_1$;

$$B_1D_1 = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a^2+b^2-2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b^2-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

в) $BB_2 = \sqrt{BB_1^2 + B_1B_2^2 - 2BB_1 \cdot B_1B_2 \cos\varphi}$;

$$BB_2 = \sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} - 2 \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos\varphi} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2b^2 - 2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}};$$

$$BD = \sqrt{BB_2^2 + DB_2^2};$$

$$BD = \sqrt{\frac{2a^2b^2 - 2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2} + \frac{\left(b^2-a^2\right)^2}{a^2+b^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}}.$$

Примечания. 1. Естественно, существуют и другие способы решения: например *векторный*.

2. При $a = b$ ($ABCD$ — квадрат)

$$BD = a\sqrt{1-\cos\varphi} = a\sqrt{2}\sin\frac{\varphi}{2} \quad (B_1 \equiv D_1).$$

3. При $\varphi = 90°$ $\quad BD = \sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$.

4. При $0 < \varphi < 90°$ $\quad BD = \sqrt{\dfrac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}}$ $(\cos\varphi > 0)$.

5. При $180° > \varphi > 90°$ $\quad BD = \sqrt{\dfrac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}}$ $(\cos\varphi < 0)$.

Изменяется только вид чертежа, а вычислительная формула остается прежней.

Задача-теорема. Концы отрезка AB принадлежат разным граням двугранного угла. Полуплоскости α и β есть грани двугранного угла, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Расстояния от концов отрезка до ребра двугранного угла равны, соответственно, $AA_1 = a$; $BB_1 = b$, где $AA_1 \perp A_1B_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1$, а $A_1B_1 = c$. Величина двугранного угла равна φ. Найдите длину отрезка AB.

Дано:

$AA_1B_1 \in \alpha$

$BB_1A_1 \in \beta$

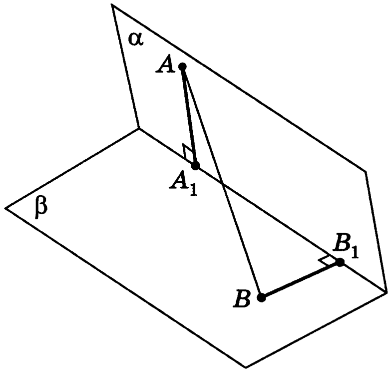
A_1B_1 — ребро двугранного угла

$\rho\left(\angle A\underline{A_1B_1}B\right) = \varphi$

$AA_1 \perp A_1B_1$; $BB_1 \perp A_1B_1$

$AA_1 = a$; $BB_1 = b$; $A_1B_1 = c$

Найдите AB.



Решение этой задачи рассмотрено в главе 2, с. 318.

В ней доказывается формула, связывающая данные задачи:

$\boxed{AB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi}$,

или, если $AB = d$, то $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{2ab}}$.

Предыдущая задача 4 решается тогда проще (см. рис. на с. 43).

Так как $BB_1^2 = \dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2} = DD_1^2$ и $B_1D_1^2 = \dfrac{\left(b^2 - a^2\right)^2}{a^2+b^2}$, то, применяя формулу, получим

$$BD^2 = \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2} + \frac{\left(b^2-a^2\right)^2}{a^2+b^2} - \frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}\cos\varphi =$$

$$= \frac{\cancel{2a^2b^2} + b^4 + a^4 - \cancel{2a^2b^2} - 2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2} = \boxed{\frac{a^4 + b^4 - 2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}},$$

что и требовалось доказать.

Некоторые свойства пирамид

I. Свойства пирамид с равными ребрами

Для некоторых n-угольных пирамид справедливы утверждения, связывающие: 1. равенство боковых ребер; 2. равенство углов между боковыми ребрами и плоскостью основания; 3. ортогональную проекцию вершины пирамиды в центр описанной около основания окружности.

А. Если все боковые ребра пирамиды равны, то они образуют с плоскостью равные углы, и вершина проецируется в центр описанной около основания окружности.

Дано:

$SA_1A_2A_3\dots A_n$ — пирамида
$SO\perp A_1A_2A_3\dots A_n$
$SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$

Докажите:
а) $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$;
б) O — центр описанной окружности.

В. Если боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы, то все они равны, и вершина пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности.

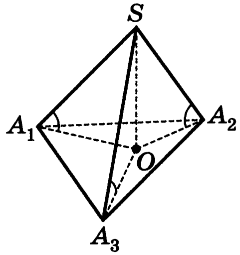
Дано:

$SA_1A_2A_3\dots A_n$ — пирамида
$SO\perp A_1A_2A_3\dots A_n$
$\angle SA_1O = \angle SA_2O = \dots = \angle SA_nO$,
где $\left(\widehat{SA_1; A_1}A_2\dots A_n\right) =$
$= \left(\widehat{SA_2; A_1}A_2\dots A_n\right) = \dots =$
$= \left(\widehat{SA_n; A_1}A_2\dots A_n\right)$.

Докажите:
а) $SA_1 = SA_2 = \dots = SA_n$;
б) O — центр описанной окружности.

С. Если вершина пирамиды проецируется в центр описанной около основания окружности, то все боковые ребра равны и образуют с плоскостью основания равные углы.

Дано:
$SA_1A_2A_3\ldots A_n$ — пирамида
$SO\perp A_1A_2A_3\ldots A_n$
O — центр описанной окружности



Докажите:
а) $SA_1 = SA_2 = \ldots = SA_n$;
б) $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \ldots = \angle SA_nO$.

Рассмотрим доказательство для $SA_1A_2A_3$ $(n = 3)$.

Докажем утверждение **А** (для треугольной пирамиды).

Дано:
$SA_1A_2A_3$ — пирамида
$SA_1 = SA_2 = SA_3$
$SO\perp A_1A_2A_3$

а) $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O$, т. е.
$\left(\widehat{SA_1; A_1}A_2A_3\right) = \left(\widehat{SA_2; A_1}A_2A_3\right) = \left(\widehat{SA_3; A_1}A_2A_3\right)$;
б) $OA_1 = OA_2 = OA_3$,
т. е. O — центр описанной окружности.

а) Рассмотрим $\triangle SA_1O; \triangle SA_2O; \triangle SA_3O$

1. Эти треугольники прямоугольные ($SO\perp A_1A_2A_3$).
2. $A_1S = A_2S = A_3S$ по условию, тогда по гипотенузе и катету $\triangle SA_1O = \triangle SA_2O = \triangle SA_3O$.
   Значит $\angle SA_1O = \angle SA_2O = \angle SA_3O$, т. е.
   $\left(\widehat{SA_1; A_1}A_2A_3\right) = \left(\widehat{SA_2; A_1}A_2A_3\right) = \left(\widehat{SA_3; A_1}A_2A_3\right)$.

б) $SA_1 = SA_2 = SA_3$, $A_1O = A_2O = A_3O$,
т. е. O — центр описанной окружности.

Аналогично доказываются утверждения **В** и **С**.

Примечания.

1. Отметим, что так как $\triangle SA_1O; \triangle SA_2O; \triangle SA_3O$ прямоугольные, то для их равенства достаточно одного из следующих признаков, связанных с пирамидой:

а) равенства боковых ребер;

б) равенства углов между боковыми ребрами и плоскостью основания;

в) равенства расстояний от точки O до вершин основания пирамиды, т. е. O — центр описанной окружности.

Следовательно, справедливость любого из трех утверждений (**А**, **В** и **С**) порождает справедливость остальных двух утверждений — это пример трех теорем, для которых справедливы по две обратных теоремы.

2. Аналогичные доказательства такого же набора условий можно провести для n-угольной пирамиды ($n > 3$).

II. Свойства пирамид с равными апофемами

Для некоторых n-угольных пирамид справедливы утверждения, связывающие: 1. равенство апофем боковых граней; 2. равенство двугранных углов при ребрах основания пирамиды; 3. ортогональную проекцию вершины в центр вписанной окружности.

А. Если все апофемы боковых граней пирамиды равны, то все двугранные углы при сторонах основания равны, и вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности.

Дано:

$SA_1A_2A_3 \ldots A_n$ — пирамида

$SO \perp A_1A_2A_3 \ldots A_n$

$\rho(S; A_1A_2) = \rho(S; A_2A_3) = \rho(S; A_3A_4) = \ldots =$
$= \rho\left(S; A_{n-1}A_{n-2}\right)$

Докажите:
а) O — центр вписанной окружности;
б) $\angle S\underline{A_1A_2}A_3 = \angle S\underline{A_2A_3}A_4 = \ldots = \angle S\underline{A_{n-2}A_{n-1}}, A_n$ — линейные углы двугранных углов при сторонах основания.

В. Если все двугранные углы при сторонах основания пирамиды равны, то все апофемы боковых граней равны, и вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности.

Дано:
$SA_1A_2A_3\ldots A_n$ — пирамида
$SO \perp A_1A_2A_3\ldots A_n$
$\angle S\underline{A_1A_2}A_3 = \angle S\underline{A_2A_3}A_4 = \ldots = \angle S\underline{A_{n-2}A_{n-1}}A_n$

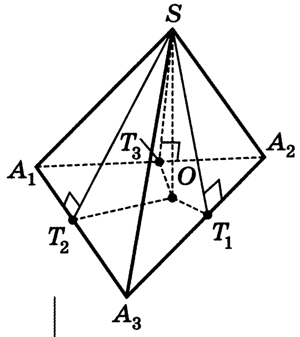
Докажите:
а) $\rho(S; A_1A_2) = \rho(S; A_2A_3) = \rho(S; A_3A_4) = \ldots =$
$= \rho\left(S; A_{n-1}A_n\right)$;
б) O — центр вписанной окружности.

С. Если вершина пирамиды проецируется в центр вписанной в основание пирамиды окружности, то все апофемы боковых граней равны, и все двугранные углы при сторонах основания пирамиды также равны.

Дано:
$SA_1A_2A_3\ldots A_n$ — пирамида
$SO \perp A_1A_2A_3\ldots A_n$
O — центр вписанной окружности

Докажите:
а) $\rho(S; A_1A_2) = \rho(S; A_2A_3) = \rho(S; A_3A_4) = \ldots =$
$= \rho\left(S; A_{n-1}A_n\right)$;
б) $\angle S\underline{A_1A_2}A_3 = \angle S\underline{A_2A_3}A_4 = \ldots = \angle S\underline{A_{n-2}A_{n-1}}A_n$.

Рассмотрим доказательство для $SA_1A_2A_3$ $(n=3)$.



Дано:

$SA_1A_2A_3$ — пирамида

$SO \perp A_1A_2A_3$

$\rho(S; A_1A_2) = \rho(S; A_2A_3) = \rho(S; A_1A_3)$

а) O — центр вписанной окружности;

б) $\angle S\underline{A_1A_2}A_3 = \angle S\underline{A_2A_3}A_1 = \angle S\underline{A_3A_1}A_2$ — линейные углы двугранных углов при сторонах основания.

Пусть $\left.\begin{array}{l} ST_1 \perp A_2A_3 \\ ST_2 \perp A_1A_3 \\ ST_3 \perp A_1A_2 \end{array}\right|$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах

$OT_3 \perp A_1A_2$; $OT_2 \perp A_1A_3$ и $OT_1 \perp A_2A_3$.

Рассмотрим $\triangle ST_1O$; $\triangle ST_2O$; $\triangle ST_3O$.

Так как $\triangle ST_1O$; $\triangle ST_2O$; $\triangle ST_3O$ — прямоугольные треугольники $(SO \perp A_1A_2A_3)$, а $ST_1 = ST_2 = ST_3$ (по условию апофемы боковых граней равны), то по гипотенузе и катету $\triangle ST_1O = \triangle ST_2O = \triangle ST_3O$.

Тогда:

а) $\angle ST_1O = \angle ST_2O = \angle ST_3O$ — линейные углы двугранных углов при сторонах основания.

б) $OT_1 = OT_2 = OT_3$, т.е. O — центр вписанной окружности.

Аналогично доказываются утверждения **B** и **C**.

Примечания. 1. Отметим, что так как $\triangle ST_1O$; $\triangle ST_2O$; $\triangle ST_3O$ прямоугольные, то для их равенства достаточно:

а) или равенства апофем боковых граней;

б) или равенства двугранных углов при ребрах основания;

в) или равенства расстояний от точки O до сторон основания (т. е. O — центр вписанной окружности).

2. Аналогичные доказательства такого же набора условий можно провести для n-угольных пирамид ($n > 3$).

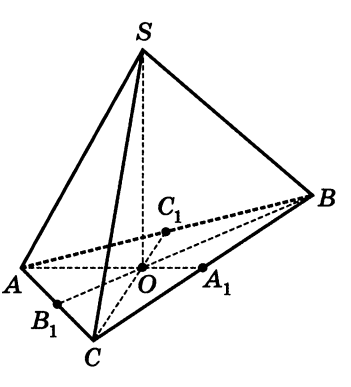
Следовательно, справедливость любого из трех утверждений **A**, **B** и **C** порождает справедливость остальных двух утверждений.

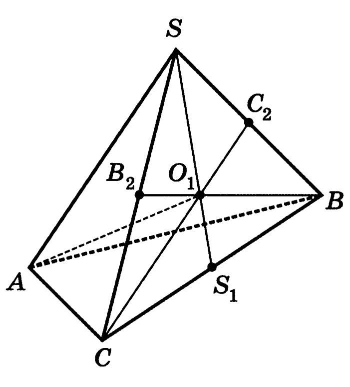
Это пример трех теорем, для которых справедливы по две обратных теоремы.

III. Свойства треугольных пирамид (тетраэдров)

Отметим ряд любопытных и полезных свойств треугольных пирамид. Попробуйте эти свойства доказать.

Определение 1. Медианой тетраэдра называется отрезок, соединяющий вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противолежащей грани.





Теорема 1. Все медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении $3 : 1$, считая от вершины тетраэдра.

Определение 2. Отрезок, соединяющий середины пар скрещивающихся ребер, называется бимедианой тетраэдра.

Теорема 2. Все бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пересечения пополам.

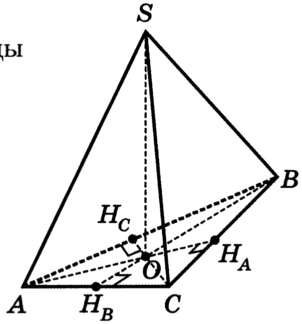
Теорема 3. Сумма квадратов двух противоположных ребер тетраэдра вдвое больше суммы квадратов двух бимедиан, проведенных к другим парам скрещивающихся ребер.

Определение 3. Тетраэдр, высоты которого пересекаются в одной точке, называется ортоцентрическим.

Теорема 4. Для того чтобы тетраэдр был ортоцентрическим, необходимо и достаточно, чтобы:

а) хотя бы одна из высот пирамиды ортогонально проецировалась в точку пересечения высот грани (ортоцентр);

б) противоположные ребра тетраэдра были попарно взаимно перпендикулярны;

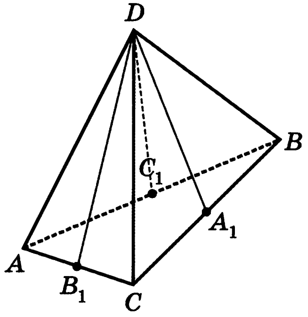


в) суммы квадратов длин противоположных ребер были равны между собой;

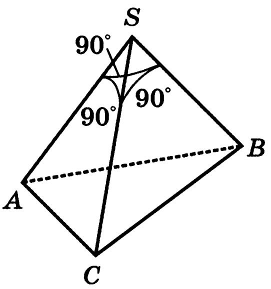
г) бимедианы тетраэдра были равны между собой;

д) перпендикуляры к граням тетраэдра, восставленные в точках пересечения медиан, пересекались в одной точке.

Теорема 5. Пусть в тетраэдре $DABC$ прямые DA_1, DB_1, DC_1 являются биссектрисами боковых граней BDC, CDA, ADB. Если $DA_1 \perp DB_1$, то $DA_1 \perp DC_1$ и $DC_1 \perp DB_1$. Иначе говоря, если две биссектрисы боковых граней взаимно перпендикулярны, то и остальные биссектрисы боковых граней взаимно перпендикулярны.



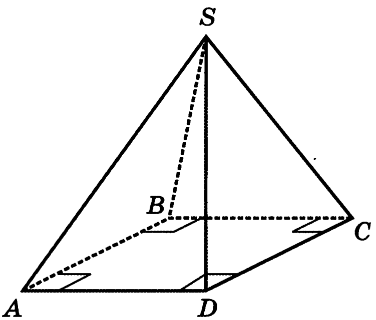
<u>Определение 4</u>. Тетраэдр называется <u>прямоугольным</u>, если три плоских угла при вершине тетраэдра равны 90°.



Теорема 6. Для прямоугольного тетраэдра выполняется метрическое соотношение $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$, где S_1, S_2, S_3 — площади боковых граней (прямоугольные треугольники), а S — площадь грани основания.

IV. Свойства четырехугольных пирамид

Теорема 7. Если в основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$, то $SA^2 + SC^2 = SB^2 + SD^2$.



Практикум 3 (Задачи на свойства пирамид)

Задача 1. Вершина четырехугольной пирамиды равноудалена от вершин трапеции основания. Высота пирамиды равна 15. Основание трапеции равно 28, боковая сторона трапеции равна 26, а диагональ трапеции равна 30. Найдите сумму котангенсов двугранных углов при ребрах основания пирамиды.

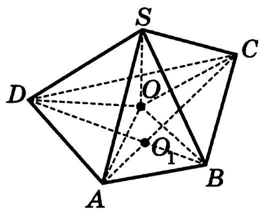
Дано:

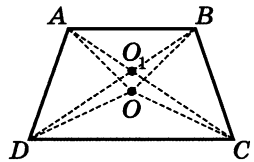
$SABCD$ — пирамида
$SA = SB = SC = SD$
$\rho(S; ABCD) = 15$
$AB \parallel DC$
$AB = 28,\ BC = 26,\ AC = 30$

Найдите
$\operatorname{ctg}(\angle S\underline{AB}C) + \operatorname{ctg}(\angle S\underline{BC}D) + \operatorname{ctg}(\angle S\underline{CD}A) + \operatorname{ctg}(\angle S\underline{DA}B)$

а) Предварительные соображения.

Предположим, что $AB < DC$ и $SO \perp ABC$.





1. Так как боковые ребра пирамиды равны по условию, то вершина ортогонально проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды.

2. Так как окружность и треугольник однозначно определяются тремя точками, не лежащими на одной прямой, то любые три вершины трапеции образуют треугольник, центр описанной окружности которого совпадает с центром описанной около трапеции окружности.

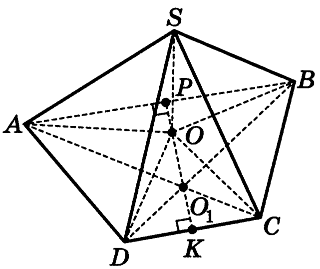
3. $\angle ABC$ — острый, так как $30^2 < 26^2 + 28^2$.

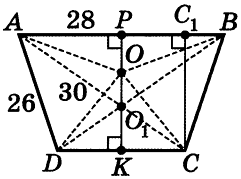
   Но известно, что против большей стороны в треугольнике лежит больший угол, т. е. $\triangle ABC$ — остроугольный.

   Значит точка O — центр описанной окружности — находится внутри $\triangle ABC$, и данные чертежи неверно моделируют условия задачи.

4. Так как около трапеции основания пирамиды описана окружность, то трапеция является равнобедренной, и центр окружности находится на оси симметрии трапеции.

5. Так как $\triangle ABC$ — остроугольный, то именно *большее* основание трапеции равно 28 (т. е. $AB > DC$).





$$\left.\begin{array}{l} O \in PK \\ PK \perp AB \end{array}\right| \text{, значит } \begin{array}{l} AP = PB \\ DK = KC \end{array}$$

(PK — ось симметрии трапеции).

б) Найдем $S_{\triangle ABC}$, используя теорему Герона:

$S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

1. $p_{\triangle ABC} = \dfrac{26+28+30}{2} = 42$.

2. $S_{\triangle ABC} = \sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} =$

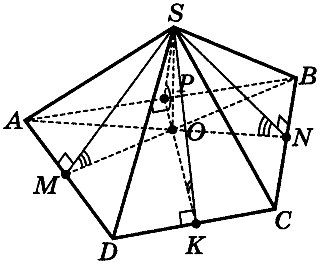
   $= \sqrt{42 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} = 4^2 \cdot 3 \cdot 7$.

в) $R_\text{о} = \dfrac{abc}{4S}$; $\quad R_\text{о} = \dfrac{30 \cdot 28 \cdot 26}{4 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 7} = \dfrac{65}{4} = 16\dfrac{1}{4}$.

г) $H_{AB} = CC_1 = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$; $\quad CC_1 = KP = \dfrac{2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 7}{28} = 24$.

д) Теперь найдем двугранные углы при ребрах основания.

1. Так как $OP \perp AB$, то $SOP \perp AB$, тогда $\rho(\angle S\underline{AB}O) = \rho(\angle SPO)$ (мера двугранного угла равна мере линейного угла).



2. $OP = \sqrt{OB^2 - PB^2}$; $\quad \left(PB = \dfrac{1}{2}AB\right)$

$$OP = \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - 14^2} = \frac{\sqrt{(65 + 14 \cdot 4)(65 - 14 \cdot 4)}}{4} =$$
$$= \frac{11 \cdot 3}{4} = 8\frac{1}{4} \quad (OP \neq OK).$$

3. $\operatorname{ctg}(\angle SPO) = \dfrac{OP}{OS}$; $\operatorname{ctg}(\angle SPO) = \dfrac{8\frac{1}{4}}{15} = \dfrac{33}{60}$

$(\rho(S; ABCD) = OS = 15)$.

е) 1. Так как $OK \perp DC$, то $SOK \perp DC$,

тогда $\rho(\angle S\underline{DC}O) = \rho(\angle SKO)$.

2. $OK = PK - OP$; $\quad OK = 24 - 8\dfrac{1}{4} = 15\dfrac{3}{4}$.

3. $\operatorname{ctg}(\angle SKO) = \dfrac{OK}{OS}$; $\quad \operatorname{ctg}(\angle SKO) = \dfrac{15\frac{3}{4}}{15} = \dfrac{63}{60}$.

ж) 1. Так как $ON \perp BC$ по построению, то $SON \perp BC$, тогда $\rho(\angle S\underline{CB}O) = \rho(\angle SNO)$.

2. $ON = \sqrt{OB^2 - NB^2}$

($NB = NC$, так как $OC = OB$ и $ON \perp BC$);

$$ON = \sqrt{\left(\frac{65}{4}\right)^2 - 13^2} = \frac{\sqrt{(65+52)(65-52)}}{4} = $$
$$= \frac{13 \cdot 3}{4} = \frac{39}{4}.$$

3. $\operatorname{ctg}(\angle SNO) = \dfrac{ON}{OS}$; $\operatorname{ctg}(\angle SNO) = \dfrac{\frac{39}{4}}{15} = \dfrac{39}{60}$.

Учтем, что $\angle SMO = \angle SNO$,

т. е. $\operatorname{ctg}(\angle SMO) = \operatorname{ctg}(\angle SNO) = \dfrac{39}{60}$.

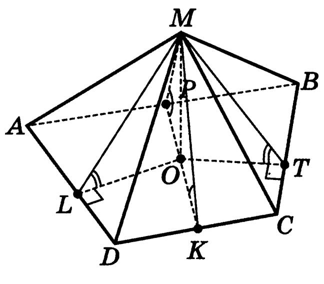
з) $\operatorname{ctg}(\angle SPO) + \operatorname{ctg}(\angle SKO) + 2\operatorname{ctg}(\angle SNO) =$

$$= \frac{33}{60} + \frac{63}{60} + \frac{2 \cdot 39}{60} = \frac{96+78}{60} = \frac{174}{60} = 2\frac{54}{60} = \boxed{2{,}9}.$$

Задача 2. Вершина пирамиды, в основании которой лежит равнобедренная трапеция, равноудалена от ребер основания и удалена от плоскости основания на 10. Параллельные стороны основания пирамиды равны 9 и 25. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано:

$MABCD$ — пирамида
$\rho(M; AB) = \rho(M; BC) =$
$\rho(M; DC) = \rho(M; AD)$
$\rho(M; ABCD) = 10$
$AB \parallel DC$
$AB = 25$
$DC = 9$



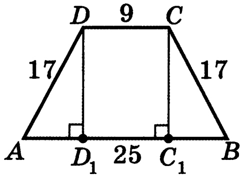
Найдите $S_{\text{б.п}}$.

а) Предварительные соображения.

1. Так как точка M равноудалена от сторон основания, то точка M проецируется в центр вписанной в основание пирамиды окружности.

   Теорема. Для того чтобы в четырехугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы длин противоположных сторон совпадали.

2. Так как трапеция равнобедренная по условию, то $AB + DC = 2AD$, т. е. $25 + 9 = 2AD$, $AD = 17 = BC$.
3. Двугранные углы при ребрах основания в пирамиде равны между собой.
4. Значит, радиус вписанной окружности равен половине высоты, в данном случае, трапеции.



б) 1. $AD_1 = \dfrac{AB - DC}{2}$;

$AD_1 = \dfrac{25 - 9}{2} = 8.$

2. $DD_1 = \sqrt{AD^2 - AD_1^2}$;

$DD_1 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$

3. $r_{\text{в}} = \dfrac{1}{2}DD_1$; $\quad r_{\text{в}} = 7{,}5 = OK.$

в) 1. $\left.\begin{array}{l} OK \perp DC \\ MO \perp ABCD \end{array}\right|$, значит $MOK \perp DC$,

т. е. $\rho(\angle M\underline{DC}B) = \rho(\angle MKO)$.

2. $MK = \sqrt{OK^2 + MO^2}$;

$MK = \sqrt{\left(\dfrac{15}{2}\right)^2 + 10^2} = \dfrac{25}{2} = 12{,}5.$

3. $\cos(\angle MKO) = \dfrac{OK}{MK}$; $\quad \cos(\angle MKO) = \dfrac{7{,}5}{12{,}5} = \dfrac{3}{5}.$

г) **Теорема.** В пирамиде с равными двугранными углами при ребрах основания площадь основания равна произведению площади боковой поверхности пирамиды на косинус двугранного угла при ребре основания.

$\boxed{S_{\text{осн}} = S_{\text{б.п}} \cos\alpha}$, или $\boxed{S_{\text{б.п}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos\alpha}}$.

1. $S_{\text{осн}} = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot H_{ABCD}$;

$S_{\text{осн}} = \dfrac{9 + 25}{2} \cdot 15 = 17 \cdot 15 = 255.$

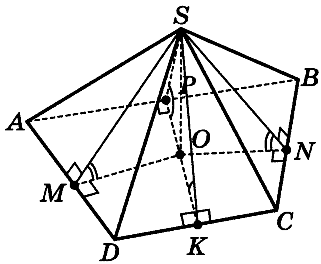
2. $S_{\text{б.п}} = \dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos(\angle MKO)}$; $S_{\text{б.п}} = \dfrac{255}{\frac{3}{5}} = 85 \cdot 5 = 425$;

$\boxed{S_{\text{б.п}} = 425}$.

Задача 3*. Вершины пирамиды равноудалены от сторон основания на 18,2. В основании лежит трапеция с основанием, равным 30, боковой стороной, равной 26, и диагональю, их соединяющей, равной 28. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Дано:

$SABCD$ — пирамида
$\rho(S; AB) = \rho(S; BC) =$
$\rho(S; DC) = \rho(S; AD) = 18{,}2$
$AB \parallel DC$
$AB = 30$
$BC = 26$
$AC = 28$



Найдите $S_{\text{б.п}}$.

а) Очевидно, что если $SO \perp ABCD$, то

1. O — центр вписанной окружности, т. е. $OP = OM = OK = ON = r_{\text{в}}$.

2. $\angle S\underline{AB}C = \angle S\underline{BC}D = \angle S\underline{CD}A = \angle S\underline{DA}B$.

б) Рассмотрим $\triangle ABC$.

1. $S_{\triangle} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \dfrac{30+28+26}{2} = 42$.

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{42(42-30)(42-28)(42-26)} = 4^2 \cdot 3 \cdot 7$.

2. $H_{AB} = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AB}$; $H_{AB} = \dfrac{2 \cdot 4^2 \cdot 3 \cdot 7}{30} = \dfrac{16 \cdot 7}{5} = 22{,}4$.

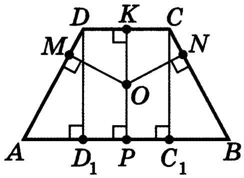
Учтем, что $r_в = \dfrac{1}{2} H_{AB}$; $r_в = \dfrac{1}{2} \cdot 22{,}4 = 11{,}2$.

в) 1. Так как в $ABCD$ можно вписать окружность,

то $AB + DC = AD + BC$,

т. е. $30 + DC = AD + 26$; $4 + DC = AD$.

Для решения задачи необходимо найти DC и AD.



2. Пусть $DD_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$.

$r_в = OM = OK = ON = OP$

$(OM \perp AD,\ PK \perp AB,\ ON \perp BC)$.

Отметим, что $AM = AP$ $(\triangle AMO = \triangle APO)$

и $BP = BN$ $(\triangle BPO = \triangle BNO)$.

Тогда пусть $\begin{matrix} CK = x = C_1P \\ DK = y = D_1P \end{matrix}$.

$DM = KD$ $(\triangle OMD = \triangle OKD)$;

$CK = CN$ $(\triangle COK = \triangle CON)$.

3. $C_1B = \sqrt{BC^2 - CC_1^2}$;

$C_1B = \sqrt{26^2 - 22{,}4^2} = \sqrt{(26 + 22{,}4)(26 - 22{,}4)} =$

$= \sqrt{48{,}4 \cdot 3{,}6} = \dfrac{22 \cdot 6}{10} = 13{,}2.$

$AC_1 = AB - C_1B; \quad AC_1 = 30 - 13{,}2 = 16{,}8.$

$AP = AC_1 - PC_1; \quad AP = 16{,}8 - x = AM.$

Тогда $AD = AM + DM = 16{,}8 - x + y$

и $DC = DK + CK = y + x.$

4. Так как $AB + DC = AD + BC$, то

$30 + x + y = 16{,}8 - x + y + 26; \quad 2x = 12{,}8; \quad x = 6{,}4.$

5. Из $\triangle AD_1D$:

$AD^2 = AD_1^2 + D_1D^2$, где $AD_1 = AC_1 - C_1P - D_1P$;

$AD_1 = 16{,}8 - 6{,}4 - y$, т. е. $AD_1 = 10{,}4 - y$.

$AD = AM + DM; \quad AD = 16{,}8 - 6{,}4 + y = 10{,}4 + y,$

т. е. $AD = 10{,}4 + y$.

Тогда $(10{,}4 + y)^2 = (10{,}4 - y)^2 + 22{,}4^2$;

$10{,}4^2 + 20{,}8y + y^2 = 10{,}4^2 - 20{,}8y + y^2 + 22{,}4^2$;

$41{,}6y = 22{,}4^2; \quad 41{,}6y = 501{,}76;$

$y = \dfrac{501{,}76}{41{,}6} = 12\dfrac{8}{130}$, т. е. $y = 12\dfrac{4}{65}$.

г) 1. $p_{ABCD} = \dfrac{AB + BC + DC + AD}{2}$,

т. е. $p_{ABCD} = \dfrac{30 + 26 + \left(6{,}4 + 12\frac{4}{65}\right) + 10{,}4 + 12\frac{4}{65}}{2} =$

$= \dfrac{96\frac{12}{13}}{2} = 48\dfrac{6}{13}.$

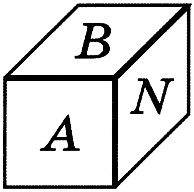
2. $S_{\text{б.п}} = p_{ABCD} \cdot SK$

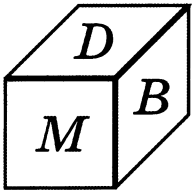
($SK = SM = SP = SN$ — апофемы боковых граней);

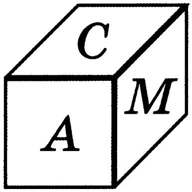
$S_{\text{б.п}} = 48\dfrac{6}{13} \cdot 18{,}2 = \dfrac{630}{13} \cdot \dfrac{91}{5} = 126 \cdot 7 = \boxed{882}.$

Задача-игра

Непрозрачный куб показывают три раза так, что видны одновременно только три грани.

1. 

2. 

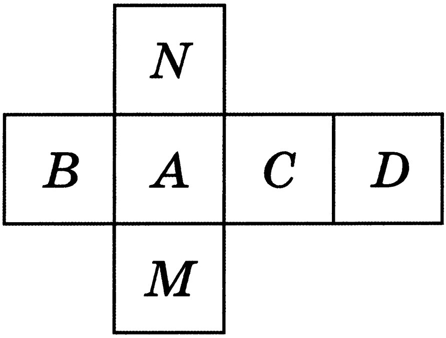
3. 

Задача состоит в том, чтобы представить, какие буквы находятся на невидимых гранях куба в каждом из представленных неполных изображений этого куба.

Для решения задачи, если пространственное представление недостаточно развито, необходимо начертить развертку куба и заполнить ее соответствующими буквами. Затем, если все равно не получается, собрать модель куба и посмотреть, какие буквы на каких гранях и в каком порядке.

Ответы таковы:

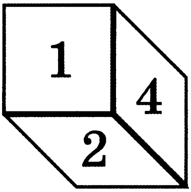
1. задняя грань — D;
   левая боковая — M;
   грань основания — C;
2. задняя грань — N;
   левая боковая — C;
   грань основания — A;
3. задняя грань — D;
   левая боковая — N;
   грань основания — B.

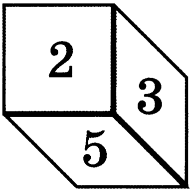


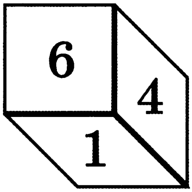
Примечание. Если не получается сделать развертку, тогда просто соберите куб из бумаги или картона и, глядя на неполные изображения, постепенно нанесите буквы на грани.

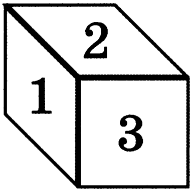
Практикум-игра

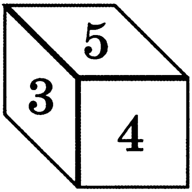
1. На гранях куба нарисованы цифры. Какие цифры будут на невидимых гранях куба?

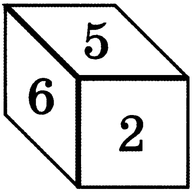
а) 1. 

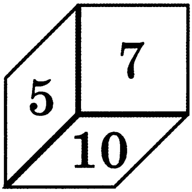
2. 

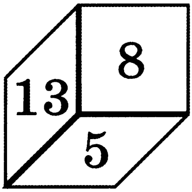
3. 

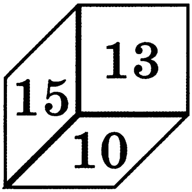
б) 1. 

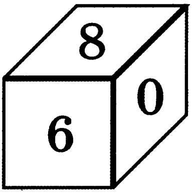
2. 

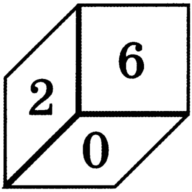
3. 

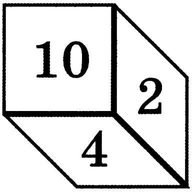
в) 1. 

2. 

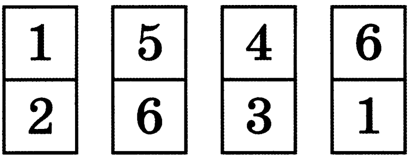
3. 

г) 1. 

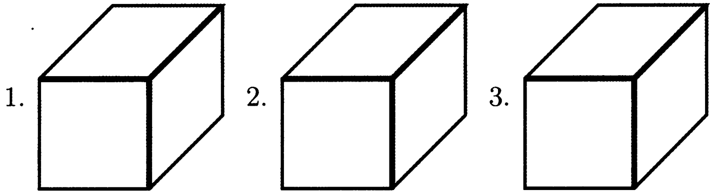
2. 

3. 

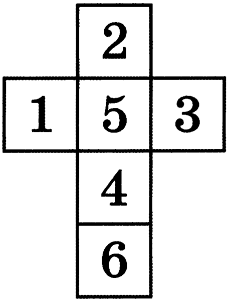
д) В этом случае грани куба видны только в профиль, и их две:



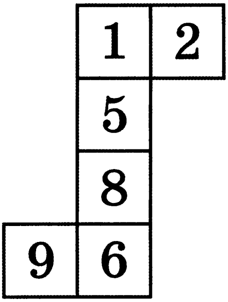
2. По развертке заполните грани куба цифрами.



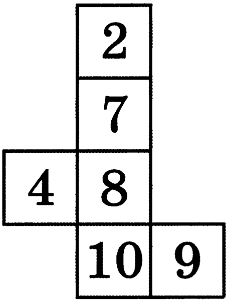
а)



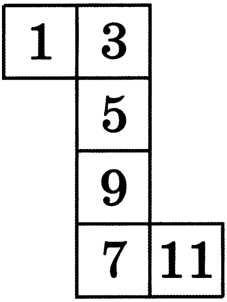
б)



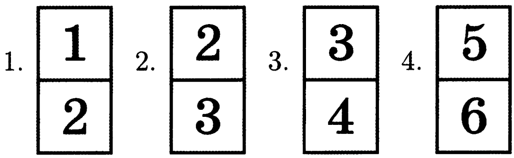
в)



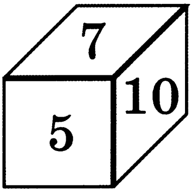
г)

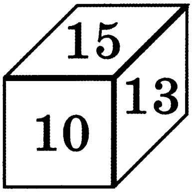


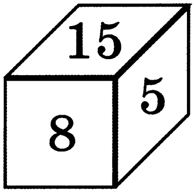
д)

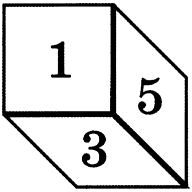


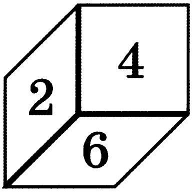
3. Возможно ли обозначить грани одного куба цифрами?

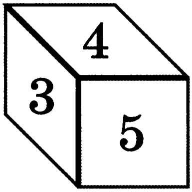
а) 1. 

2. 

3. 

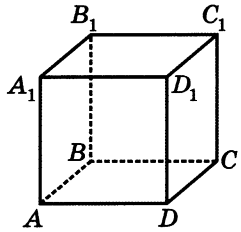
б) 1. 

2. 

3. 

Комментарии. Наибольшую сложность для обучения представляет организация процесса развития пространственного представления. Причем, чем раньше удается вовлечь в этот процесс учащихся, тем лучше будут результаты в дальнейшем. Естественно, игровая составляющая этого процесса является мощным двигателем (мотивом) развития и чрезвычайно его ускоряет, делает весьма привлекательным, а значит, и успешным. Предложенная в игровой форме система задач позволяет весьма эффективно и быстро решать поставленные задачи. При определенных условиях и участии учителя эта работа может начинаться уже в начальных классах. Тем более желательно проведение таких *практических* игр в 7–9 классах.

Практикум 4 (Углы, объемы, расстояния)



1. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб

$AB = a$

Найдите:

а) $\left(\widehat{AB_1; ABC_1D_1}\right)$;

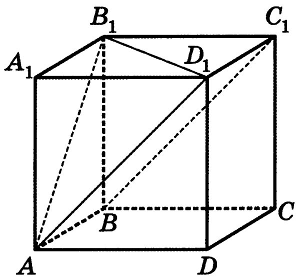
б) $\left(\widehat{AB_1D_1; ABC_1D_1}\right)$;

в) $\left(\widehat{AA_1; AB_1D_1}\right)$; г) $\left(\widehat{AB_1D_1; AD_1C}\right)$;

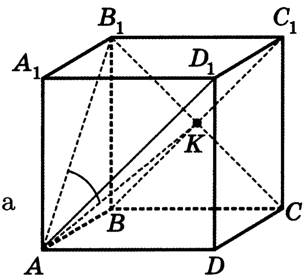
д) $\dfrac{V_{B_1ABC_1D_1}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$; е) $\dfrac{V_{D_1AB_1C}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$; ж) $\rho(AD_1; DC_1)$.

Предполагается, что читатель знает формулы объема призмы и пирамиды, хотя бы из справочника.

а) Найдем $\left(\widehat{AB_1; ABC_1D_1}\right)$.



1. Сделаем доп. построения: $B_1K \perp BC_1$. Так как BB_1C_1C — квадрат, то $BK = KC$ и $B_1K = \frac{1}{2}B_1C$, т. е. $B_1K = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2}$; $(B_1C = \sqrt{BB_1^2 + BC^2})$.



2. $\left.\begin{array}{l} AB \perp BB_1 \\ AB \perp BC \end{array}\right| \Rightarrow AB \perp BB_1C_1C$, значит AB перпендикулярна любой прямой плоскости BB_1C_1C, в том числе $AB \perp BC_1$ и $AB \perp B_1K$.

3. Получили

$$\left.\begin{array}{l} B_1K \perp BC_1 \text{ (по построению)} \\ B_1K \perp AB \text{ (по доказанному)} \end{array}\right| \Rightarrow B_1K \perp ABC_1D_1.$$

4. Тогда AK — ортогональная (перпендикулярная) проекция AB_1 на ABC_1D_1.

5. Значит $\underline{\left(\widehat{AB_1; ABC_1D_1}\right) = \angle B_1AK}$.

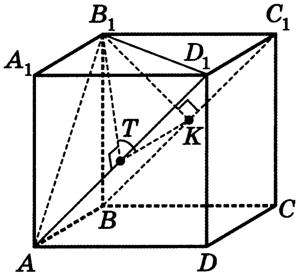
6. $\triangle AB_1K$ — прямоугольный.

$\sin(\angle B_1AK) = \dfrac{B_1K}{AB_1}$, т. е. $\sin(\angle B_1AK) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Отсюда следует, что $\angle B_1AK = \boxed{30^\circ}$;

$\left(\widehat{AB_1; ABC_1D_1}\right) = \boxed{30^\circ}$.

б) Найдем $\left(\widehat{AB_1D_1; ABC_1D_1}\right)$.

1. 

2. По сути, здесь речь идет о двугранном угле $\angle B_1\underline{AD_1}C_1$ в пирамиде $B_1ABC_1D_1$.

3. Сделаем доп. построение. Пусть $B_1T \perp AD_1$.
Так как $\triangle AB_1D_1$ — равносторонний ($AB_1 = B_1D_1 = AD_1$ — диагонали равных квадратов), то $AT = TD_1$.

4. Пусть точка K — из построения к пункту а).
Тогда $KT \parallel AB$.
Так как $AB \perp BC_1$ (по доказанному в пункте а), то $KT \perp BC_1$ и $\underline{KT \perp AD_1}$.

5. Значит $B_1T \perp AD_1$ (по построению), $KT \perp AD_1$ (по доказанному), отсюда следует, что $AD_1 \perp B_1KT$, т. е. $\left(AB_1\widehat{D_1; A}BC_1D_1\right) = \angle B_1TK$.

   Примечание. $\left(AB_1\widehat{D_1; A}BC_1D_1\right) = \angle B_1TK$ — в записи равенства в таких случаях по умолчанию понимается равенство мер этих углов, т. е. равенство значений этих углов.

6. Рассмотрим $\triangle B_1KT$.
   $AB \perp BB_1C_1C$ (по доказанному в пункте а), значит $KT \perp BB_1C_1C$ $(KT \parallel AB)$, т. е. $\angle B_1KT = 90°$.

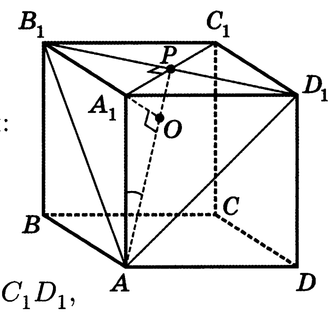
7. $KT = AB = a$; $B_1K = \dfrac{1}{2}B_1C$; $B_1K = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

8. $\operatorname{tg}(\angle B_1TK) = \dfrac{B_1K}{KT}$;

   $\operatorname{tg}(\angle B_1TK) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\angle B_1TK = \boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$;

   $\left(AB_1\widehat{D_1; A}BC_1D_1\right) = \boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

в) Найдем $\left(A\widehat{A_1; A}B_1D_1\right)$.



Первый способ для пункта в)

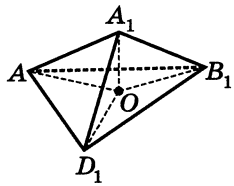
1. Выполним доп. построения: $A_1P \perp B_1D_1$. Так как $AB_1 = B_1D_1 = AD_1$, то $B_1P = PD_1$.

2. $\left.\begin{matrix} AA_1 \perp A_1B_1 \\ AA_1 \perp A_1D_1 \end{matrix}\right| \Rightarrow AA_1 \perp A_1B_1C_1D_1$,
   значит $AA_1 \perp B_1D_1$,
   тогда $\left.\begin{matrix} B_1D_1 \perp AA_1 \\ B_1D_1 \perp A_1P \end{matrix}\right| \Rightarrow B_1D_1 \perp AA_1P$.
   Отсюда следует, что $B_1D_1 \perp AP$.

3. Построим $A_1O \perp AP$, тогда $A_1O \perp B_1D_1$ $(B_1D_1 \perp AA_1P)$, значит
$$\left.\begin{array}{l} A_1O \perp AP \text{ (по построению)} \\ A_1O \perp B_1D_1 \text{ (по доказанному)} \end{array}\right| \Rightarrow A_1O \perp AB_1D_1.$$
Отсюда следует, что $\left(\widehat{AA_1; AB_1D_1}\right) = \angle A_1AO.$

4. Из $\triangle AA_1P$ следует, что
$$\operatorname{tg}(\angle A_1AP) = \frac{A_1P}{AA_1} \quad (\angle A_1AP = \angle A_1AO),$$
т. е. $\operatorname{tg}(\angle A_1AP) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,
значит $\left(\widehat{AA_1; AB_1D_1}\right) = \boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$.

Второй способ для пункта в)



1. Рассмотрим пирамиду $A_1AB_1D_1$ как часть куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Так как $AA_1 = A_1B_1 = A_1D_1$ и $AB_1 = B_1D_1 = AD_1$, то имеем правильную пирамиду.

2. Значит вершина A_1 перпендикулярно (ортогонально) проецируется в точку O — центр вписанной и описанной около $\triangle AB_1D_1$ — окружностей, где
$$R_{\text{о}} = \frac{a}{2\sin\alpha}, \text{ т. е. } R_{\text{о}} = \frac{D_1B_1}{2 \cdot \sin 60^\circ}; \quad R_{\text{о}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

3. $\cos(\angle A_1AO) = \dfrac{AO}{AA_1}$,
т. е. $\cos(\angle A_1AO) = \dfrac{a\sqrt{\frac{2}{3}}}{a} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$;
$$\left(\widehat{AA_1; AB_1D_1}\right) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = \boxed{\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}}.$$

Примечание

Можно доказать, что $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Действительно, $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} \in \mathrm{I}$ четверти; $\arccos\dfrac{\sqrt{6}}{3} \in \mathrm{I}$ четверти.

Тогда, если углы принадлежат одной четверти и значения косинусов этих углов равны, то сами эти углы равны.

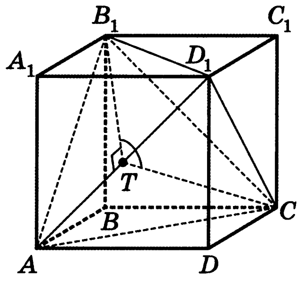
Рассмотрим $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\left(\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

С другой стороны, $\cos\left(\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$, значит

$$\boxed{\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} = \arccos\frac{\sqrt{6}}{3} = \left(\widehat{AA_1; AB_1D_1}\right)}.$$

г) Найдем $\left(\widehat{AB_1D_1; AD_1C}\right)$.



1. Сделаем доп. построения: $B_1T \perp AD_1$. Так как $\triangle AB_1D_1 = \triangle ACD_1$ (эти треугольники образованы только из равных диагоналей), то $CT \perp AD_1$, значит $AD_1 \perp B_1TC$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости.

2. $AD_1 \perp B_1TC$, значит $\left(\widehat{AB_1D_1; AD_1C}\right) = \angle B_1TC$.

3. Из $\triangle AB_1D_1$ следует, что

$$B_1T = AB_1 \sin 60^\circ; \quad B_1T = a\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} = CT.$$

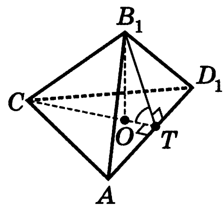
4. Из $\triangle B_1TC$ следует, что

$$\cos(\angle B_1TC) = \frac{2 \cdot B_1T^2 - B_1C^2}{2 \cdot B_1T^2} \ (B_1T = CT);$$

$$\cos(\angle B_1TC) = \frac{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{2}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2} = \frac{3a^2 - 2a^2}{3a^2} = \frac{1}{3};$$

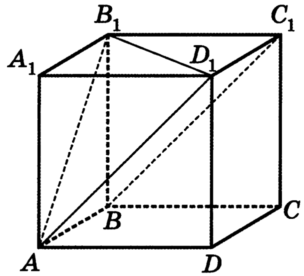
$\angle B_1TC = \arccos \frac{1}{3}$.

Итак, $\left(AB_1\widehat{D_1; A}D_1C\right) = \boxed{\arccos \frac{1}{3}}$.



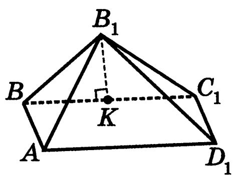
Примечание. Можно было рассмотреть пирамиду B_1AD_1C, где все ребра равны $a\sqrt{2}$, и найти двугранный угол при любом ребре (в том числе и при AD_1).

д) Найдем $\frac{V_{B_1ABC_1D_1}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$.



Первый способ для пункта д)

1. Рассмотрим пирамиду $B_1ABC_1D_1$ — часть куба.



2. Можно доказать, что $BB_1C_1 \perp ABCD$ (пункт а), т. е. $B_1K \perp BC_1$ является $H_{B_1ABC_1D_1}$ ($B_1K \perp ABC_1D_1$).

3. Из $\triangle BB_1C_1$ следует, что $B_1K = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

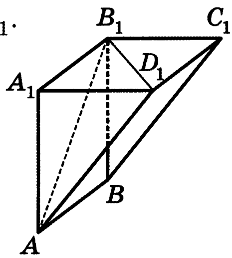
4. $S_{ABC_1D_1} = AB \cdot BC_1$, тогда $S_{ABC_1D_1} = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ (ABC_1D_1 — прямоугольник).

5. $V_{B_1ABC_1D_1} = \dfrac{1}{3} S_{ABC_1D_1} \cdot H_{B_1ABC_1D_1}$;

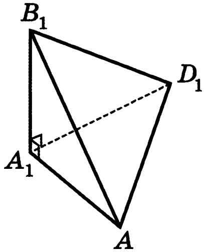
$V_{B_1ABC_1D_1} = \dfrac{1}{3} \cdot a^2\sqrt{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{3}a^3$.

6. $\dfrac{V_{B_1ABC_1D_1}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}} = \dfrac{\frac{1}{3}a^3}{a^3} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

Второй способ для пункта д)



1. Рассмотрим призму $AA_1D_1BB_1C_1$. Так как призма $AA_1D_1BB_1C_1$ состоит из пирамиды $A_1AB_1D_1$ и пирамиды $B_1ABC_1D_1$ (или плоскость AB_1D_1 разрезает призму $AA_1D_1BB_1C_1$ на пирамиду $A_1AB_1D_1$ и пирамиду $B_1ABC_1D_1$), то $V_{B_1ABC_1D_1} = V_{AA_1D_1BB_1C_1} - V_{A_1AB_1D_1}$.



2. Пирамида $A_1AB_1D_1$ может быть представлена в виде такого рисунка.

Тогда очевидно, что

$V_{AA_1B_1D_1} = \dfrac{1}{3} AA_1 \cdot S_{\triangle A_1B_1D_1}$,

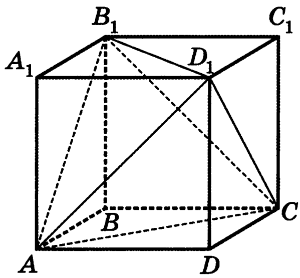
т. е. $V_{AA_1B_1D_1} = \dfrac{1}{3} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot a = \dfrac{1}{6}a^3$.

3. $V_{AA_1D_1BB_1C} = \dfrac{1}{2} V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \dfrac{1}{2}a^3$.

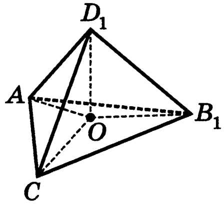
4. $V_{B_1ABC_1D_1} = \dfrac{1}{2}a^3 - \dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{1}{3}a^3$.

5. $\dfrac{V_{B_1ABC_1D_1}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$, что и требовалось найти.

е) Найдем $\dfrac{V_{D_1AB_1C}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}}$.



Первый способ для пункта е)



1. Можно рассмотреть пирамиду D_1AB_1C, у которой все ребра равны $a\sqrt{2}$, и найти ее объем.

2. $D_1O \perp AB_1C$, O — центр вписанной и описанной окружности.

$$R_{\text{о}} = \frac{a}{2\sin\alpha}; \quad R_{\text{о}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin 60^\circ} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = AO.$$

3. $D_1O = \sqrt{AD_1^2 - AO^2}$;

$$D_1O = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(a\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = a\sqrt{\frac{4}{3}}.$$

4. $S_{\triangle AB_1C} = \dfrac{1}{2}AC \cdot AB_1 \cdot \sin 60^\circ$;

$$S_{\triangle AB_1C} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}.$$

5. $V_{D_1AB_1C} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle AB_1C} \cdot D_1O$;

$$V_{D_1AB_1C} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3}a^3.$$

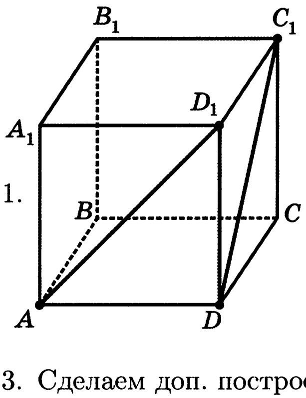
6. $\dfrac{V_{D_1AB_1C}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

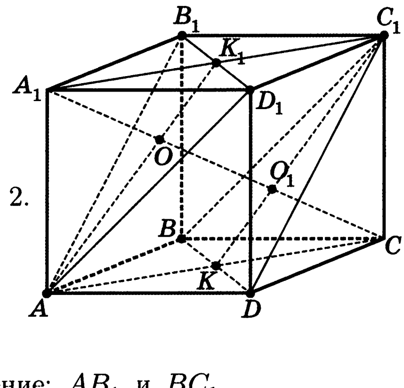
Второй способ для пункта е)

1. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ можно собрать из пирамид $A_1AB_1D_1$, BAB_1C, $C_1B_1CD_1$, DAD_1C и пирамиды D_1AB_1C,
   т. е. $V_{D_1AB_1C} = V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} - 4V_{A_1AB_1D_1}$,
   так как $V_{A_1AB_1D_1} = V_{BAB_1C} = V_{C_1B_1CD_1} = V_{DAD_1C}$
   (см. пункт д), второй способ).
2. $V_{A_1AB_1D_1} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle A_1B_1D_1} \cdot AA_1 = \dfrac{1}{6}a^3$.
3. $V_{D_1AB_1C} = a^3 - 4 \cdot \dfrac{1}{6}a^3 = \dfrac{1}{3}a^3$; $\quad \dfrac{V_{D_1AB_1C}}{V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}} = \boxed{\dfrac{1}{3}}$.

ж) Найдем $\rho(AD_1; DC_1)$.

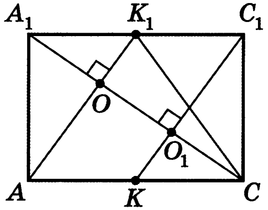
Так как расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, единственным образом определяемыми этими скрещивающимися прямыми, то построим такие плоскости, а затем найдем расстояние между ними.





3. Сделаем доп. построение: AB_1 и BC_1,
   где $\left.\begin{matrix} AB_1 \parallel DC_1 \\ BC_1 \parallel AD_1 \end{matrix}\right|$, тогда $D_1AB_1 \parallel DBC_1$.
4. Отметим, что фигура $ABDC_1B_1D_1$, увы, не является призмой.

5. Рассмотрим треугольную пирамиду $A_1AB_1D_1$ ($CDBC_1$).
Для нее $A_1A = A_1B_1 = A_1D_1$ ($CD = CB = CC_1$), значит вершина $A_1(C)$ ортогонально проецируется в центр описанной около $\triangle AB_1D_1$ ($\triangle C_1DB$) окружности. Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C ($AK_1 = K_1C_1$ и $AK = KC$).
$AA_1C_1C \perp B_1D_1$, тогда $A_1C \perp B_1D_1$ и $A_1C \perp AK_1$.



6. Следовательно, AA_1K_1C — дельтоид (четырехугольник, диагонали которого взаимно перпендикулярны, называется дельтоидом).
Значит $S_{AA_1K_1C} = \frac{1}{2}A_1C \cdot AK_1$.

С другой стороны, $S_{AA_1K_1C} = \frac{A_1K_1 + AC}{2} \cdot AA_1$ как площадь трапеции AA_1K_1C.

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = a\sqrt{3};$$

$$AK_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1K_1^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{2}};$$

$$S_{AA_1K_1C} = \frac{1}{2}a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{2} \text{ (как дельтоида).}$$

$$S_{AA_1K_1C} = \frac{A_1K_1 + AC}{2} \cdot AA_1 = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2}}{2} \cdot a = \frac{3}{4}a^2\sqrt{2}$$
(как трапеция).

Значит так как площади равны, то $A_1C \perp AK_1$, тогда $A_1C \perp AB_1D_1$ ($A_1C \perp B_1D_1$ и $A_1C \perp AK_1$).

7. Отметим, что точка O — центр окружности, описанной около $\triangle AB_1D_1$, а точка O_1 — центр окружности, описанной около $\triangle C_1DB$.

$$AO = R_{\text{o}\triangle AB_1D_1} = \frac{B_1D_1}{2\sin 60^\circ}$$

$(AB_1 = B_1D_1 = AD_1 = a\sqrt{2})$,

т. е. $AO = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$;

$$A_1O = \sqrt{AA_1^2 - AO^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = CO_1.$$

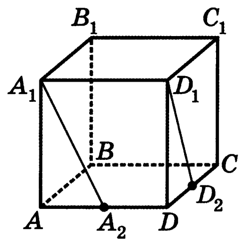
8. Так как $A_1C = a\sqrt{3}$, то $OO_1 = A_1C - 2A_1O = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$,

значит $\boxed{\rho(AD_1; DC_1) = OO_1 = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}}$,

что и требовалось доказать и найти.

2. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
A_2, D_2 — середины ребер AD и DC соответственно
$AB = a$



а) Докажите, что $A_1A_2 \curlywedge D_1D_2$.

б) $\left.\begin{array}{l} A_1A_2 \in \alpha \\ D_1D_2 \in \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right|$, постройте плоскости α и β.

Найдите:

в) $\left(\widehat{A_1A_2; D_1}D_2\right)$;

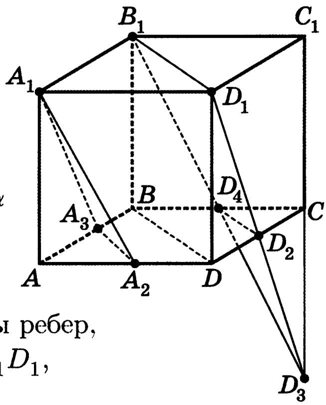
г) $S_{\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1}$; $S_{\beta \cap ABCDA_1B_1C_1D_1}$;

д) $\rho(A_1A_2; D_1D_2)$.

а) **Теорема.** Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещиваются.

Очевидно, что прямая A_1A_2 принадлежит плоскости AA_1D_1D, а прямая D_1D_2 пересекает AA_1D_1D в точке $D_1 \not\equiv A_1$, значит $A_1A_2 \,\lambda\, D_1D_2$ — т.е. A_1A_2 и D_1D_2 скрещивающиеся.

б) $\left.\begin{array}{l} A_1A_2 \in \alpha \\ D_1D_2 \in \beta \\ \alpha \parallel \beta \end{array}\right|$, постройте плоскости α и β.



1. Сделаем доп. построение: $A_1A_3 \parallel D_1D_2$. $A_1, A_2, A_3 \in \alpha$ — этими тремя точками плоскость α определена однозначно, значит $A_1A_3 \in \alpha$.

2. Так как A_3, A_2 — середины ребер, то $A_2A_3 \parallel BD$, но $BD \parallel B_1D_1$, значит $D_1B_1 \parallel A_2A_3$.
   Тогда $\left.\begin{array}{l} A_2A_3 \parallel B_1D_1 \\ A_1A_3 \parallel D_1D_2 \end{array}\right|$, значит $A_1A_2A_3 \parallel B_1D_1D_3$, где $D_3 = D_1D_2 \cap C_1C$ и $B_1D_1D_3 - \beta$.
   Следовательно, $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = A_1A_2A_3$; $\beta \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = D_1D_2D_4B_1$, причем $A_1A_2A_3 \parallel D_1D_2D_4B_1$ $(\alpha \parallel \beta)$.

в) Найдем $\left(A_1\widehat{A_2; D_1}D_2\right)$.

Рассмотрим $\triangle A_1A_2A_3$. $A_1A_2 = \sqrt{AA_1^2 + AA_2^2}$,

т.е. $A_1A_2 = \sqrt{a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2} = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = A_1A_3$.

$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2}$; $\quad BD = a\sqrt{2}$;

$A_2A_3 = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\left(A_2A_3 = \dfrac{1}{2}BD\right)$.

Так как $A_1A_3 \parallel D_1D_2$,

то $\left(A_1\widehat{A_2; D_1}D_2\right) = \left(A_1\widehat{A_2; A_1}A_3\right) = \angle A_3A_1A_2$;

$$\cos(\angle A_3A_1A_2) = \frac{A_1A_2^2 + A_1A_3^2 - A_2A_3^2}{2A_1A_2 \cdot A_1A_3};$$

$$\cos(\angle A_3A_1A_2) = \frac{2 \cdot \frac{5a^2}{4} - \frac{1}{2}a^2}{2 \cdot \frac{5}{4}a^2} = \frac{8}{10} = 0{,}8;$$

$\boxed{\angle A_3A_1A_2 = \arccos 0{,}8}$.

г) Найдем $S_{\alpha\cap ABCDA_1B_1C_1D_1}$ и $S_{\beta\cap ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

1. Можно доказать, что $\triangle A_1A_2A_3 = \triangle D_3D_2D_4$.
   Очевидно, что $S_{\triangle B_1D_3D_1} = S_{\triangle D_3D_2D_4} + S_{D_1D_2D_4B_1}$.

2. $S_{\triangle A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2}A_1A_3 \cdot A_1A_2 \sin(\angle A_3A_1A_2)$;

   $S_{\triangle A_1A_2A_3} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5a^2}{4} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{3}{8}a^2$.

   $\triangle A_1A_2A_3$ подобен $\triangle D_3D_1B_1$,

   тогда $\dfrac{S_{\triangle D_3D_1B_1}}{S_{\triangle A_1A_2A_3}} = \dfrac{(B_1D_1)^2}{(A_3A_2)^2}$;

   $B_1D_1 = 2A_3A_2$, значит $S_{\triangle D_3D_1B_1} = 4S_{\triangle A_1A_2A_3}$,

   тогда $S_{D_2D_1B_1D_4} = \dfrac{3}{4}S_{\triangle D_3D_1B_1}$,

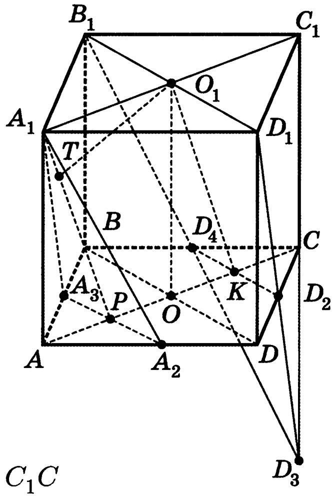
   следовательно, $S_{D_2D_1B_1D_4} = \dfrac{9}{8}a^2$;

   $\boxed{S_{\alpha\cap ABCDA_1B_1D_1C_1} = \dfrac{3}{8}a^2}$; $\boxed{S_{\beta\cap ABCDA_1B_1D_1C_1} = \dfrac{9}{8}a^2}$.

д) Найдем $\rho(A_1A_2; D_1D_2)$.

$$\text{Так как}\ \left.\begin{array}{l} A_1A_2 \in A_1A_2A_3 \\ D_1D_2 \in D_1D_2D_4B_1 \\ A_1A_2A_3 \parallel D_1D_2D_4B_1 \end{array}\right| ,$$

то $\rho(A_1A_2; D_1D_2) = \rho(A_1A_2A_3; D_1D_2D_4B_1)$.



1. Пусть $AC \cap A_2A_3 = P$.

   Так как $A_2A_3 \perp AP$ и $A_2A_3 \perp A_1P$ (докажите), то $A_2A_3 \perp AA_1P$.

   Построим $O_1T \perp A_1P$.

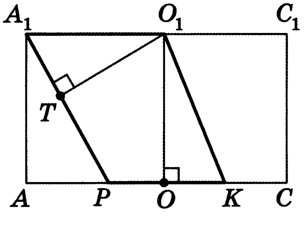
   Тогда $O_1T \perp A_2A_3$ (докажите), значит $O_1T \perp A_1A_2A_3$.

   Тогда так как $D_2D_4 \parallel A_3A_2$ и $O_1K \parallel A_1P$ (докажите) то $AA_1C_1C \perp D_2D_4$.

   Значит любая прямая AA_1C_1C перпендикулярна A_2A_3 (B_1D_1 или D_2D_4), т. е. $\rho(A_1A_2A_3; D_3B_1D_1) = \rho(A_1A_2; D_1D_2) = O_1T$.

   (Подумайте над более простыми доказательствами.)

2. Рассмотрим прямоугольник AA_1C_1C и параллелограмм PA_1O_1K.



   Очевидно, что $\triangle A_1AP = \triangle O_1OK$ ($AP = OP = OK = KC$).

   Значит $A_1P = O_1K$.

3. Тогда $\left.\begin{array}{l} S_{A_1PKO_1} = PK \cdot O_1O \\ S_{A_1PKO_1} = A_1P \cdot O_1T \end{array}\right|$,

значит $O_1T = \dfrac{PK \cdot O_1O}{A_1P}$,

где $PK = AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

$O_1O = AA_1 = a;$

$A_1P = \sqrt{AA_1^2 + AP^2};$

$$A_1P = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = a\sqrt{\frac{9}{8}} = \frac{3}{8}a\sqrt{8} = \frac{3}{4}a\sqrt{2};$$

$$O_1T = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a}{\frac{3}{4}a\sqrt{2}} = \frac{2}{3}a.$$

Итак, $\boxed{\rho(A_1A_2; D_1D_2) = \dfrac{2}{3}a}$.

Тренировочная работа 1 (Нахождение углов в прямоугольном параллелепипеде)

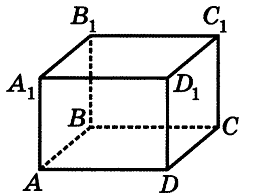
Вариант 1

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$AA_1 = 12$
$AD = 16$
$AB = 12$

Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right)$;
б) $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B)$;
в) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AA_1B_1B}\right)$;
г) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$;
д) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$;
е*) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AD_1C}\right)$.



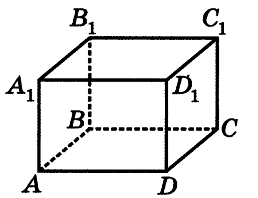
Вариант 2

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$AA_1 = 12$
$AD = 16$
$AB = 16$

Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AC_1; ABCD}\right)$;
б) $\operatorname{tg}(\angle C\overline{AB_1}B)$;
в) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AA_1C_1C}\right)$;
г) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$;
д) $\cos\left(\widehat{AB_1D_1; CB_1D_1}\right)$;
е*) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$.



Решение тренировочной работы 1

Вариант 1

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$AA_1 = 12$
$AD = 16$
$AB = 12$

Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right)$;

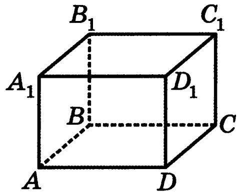
б) $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AA_1B_1B}\right)$;

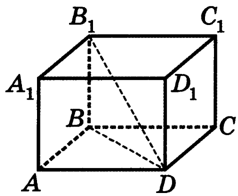
г) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$;

д) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$;

е*) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AD_1C}\right)$.



а) Найдем $\operatorname{tg}\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right)$.



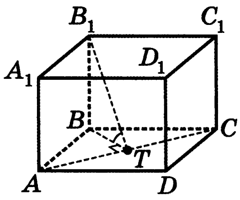
1. Так как $BB_1 \perp ABCD$, что следует из того, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, т. е. прямая призма, все грани которой прямоугольники, то $\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right) = \angle B_1DB$, где BD — проекция B_1D.

2. Значит $\operatorname{tg}(\angle B_1DB) = \dfrac{BB_1}{DB}$, где $AA_1 = BB_1 = 12$,

   а $DB = \sqrt{AD^2 + AB^2}$, т. е. $DB = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$.

3. $\operatorname{tg}(\angle B_1DB) = \dfrac{12}{20} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$.

б) Найдем $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B)$.



1. $\angle B_1\underline{AC}B$ — двугранный угол при ребре AC.

   Построим $BT \perp AC$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $B_1T \perp AC$, следовательно $AC \perp B_1TB$.

   Значит $\rho(\angle B_1\underline{AC}B) = \rho(\angle B_1TB)$,

   т. е. $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B) = \operatorname{tg}(\angle B_1TB)$.

2. Рассмотрим $\triangle ABC$.

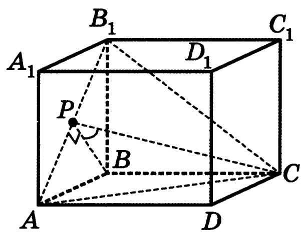
   $2S_{\triangle ABC} = AB \cdot BC = AC \cdot BT$,

   тогда $BT = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$; $\quad BT = \dfrac{12 \cdot 16}{20} = 9{,}6$.

3. $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B) = \operatorname{tg}(\angle B_1TB) = \dfrac{BB_1}{BT}$,

   т. е. $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B) = \dfrac{12}{9{,}6} = \boxed{1{,}25}$.

в) Найдем $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}A_1B_1B\right)$.



1. $\left(AB_1\widehat{C; A}A_1B_1B\right)$ — по сути, есть двугранный угол $\angle C\underline{AB_1}B$.

   Построим $BP \perp AB_1$ (доп. построение), тогда так как $BC \perp AA_1B_1B$ ($ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед), то по теореме о трех перпендикулярах $CP \perp AB_1$. Значит $\rho\left(AB_1\widehat{C; A}A_1B_1B\right) = \rho(\angle C\underline{AB_1}B) = \rho(\angle CPB)$, т. е. $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}A_1B_1B\right) = \operatorname{tg}(\angle CPB)$.

2. AA_1B_1B — квадрат по условию, тогда $BP = \frac{1}{2}A_1B$ $(A_1B = AB_1)$ и $BP = \frac{1}{2}\sqrt{AA_1^2 + AB^2}$;

$BP = \frac{1}{2}\sqrt{12^2 + 12^2} = 6\sqrt{2}$.

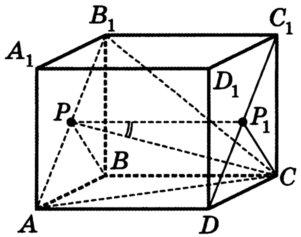
(Можно проще из $\triangle APB$.)

Отметим, что для $\triangle AB_1C$ $CA = CB_1$ $(m_{AB_1} = H_{AB_1} = CP)$.

3. $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AA_1B_1B}\right) = \operatorname{tg}(\angle CPB) = \dfrac{BC}{BP}$,

т. е. $\operatorname{tg}(\angle CPB) = \dfrac{16}{6\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{4\sqrt{2}}{3}}$.

г) Найдем $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$.



1. $\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$ — по сути, есть двугранный угол $\angle C\underline{B_1A}D$.

Используем результаты решения предыдущих задач.

$CP \perp AB_1$ $(\triangle AB_1C)$.

Построим $PP_1 \parallel AD$ $(P_1 \in DC_1)$.

Отметим, что так как $AD \perp AA_1B_1B$, то $AD \perp AB_1$, и в силу $PP_1 \parallel AD$ следует, что $PP_1 \perp AB_1$.

Значит $AB_1 \perp CPP_1$, следовательно $AB_1 \perp CP$, тогда $\rho\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right) = \rho(\angle A\underline{B_1C_1}D) = \rho(\angle CPP_1)$.

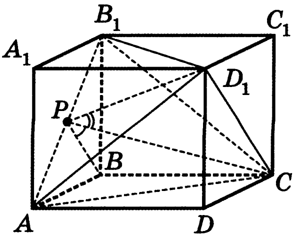
Отсюда $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right) = \operatorname{tg}(\angle CPP_1)$.

2. $\triangle CPP_1$ — очевидно прямоугольный,

тогда $\operatorname{tg}(\angle CPP_1) = \dfrac{CP_1}{PP_1}$ $(CP_1 = BP)$,

т. е. $\operatorname{tg}(\angle CPP_1) = \dfrac{6\sqrt{2}}{16} = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{8}}$.

д) Найдем $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$.



1. $\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$ — по сути, $\angle C\underline{AB_1}D_1$.

   $CP \perp AB_1$ (по доказанному), $CP = \sqrt{BP^2 + BC^2}$,

   т. е. $CP = \sqrt{\left(6\sqrt{2}\right)^2 + 16^2} = 2\sqrt{9 \cdot 2 + 64} = 2\sqrt{82}$.

2. $\triangle AB_1C = \triangle AB_1D_1$, значит $CP = D_1P = 2\sqrt{82}$

   и $D_1P \perp AB_1$, тогда $CPD_1 \perp AB_1$.

   Следовательно,

   $$\rho\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right) = \rho(\angle C\underline{AB_1}D_1) = \rho(\angle CPD_1).$$

3. Рассмотрим $\triangle CPD_1$.

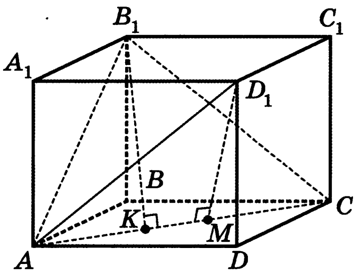
   $$\cos(\angle CPD_1) = \frac{2CP^2 - CD_1^2}{2CP^2},$$

   т. е. $$\cos(\angle CPD_1) = \frac{2\left(2\sqrt{82}\right)^2 - \left(12\sqrt{2}\right)^2}{2\left(2\sqrt{82}\right)^2} =$$

   $$= \frac{8 \cdot 82 - 144 \cdot 2}{8 \cdot 82} = \frac{41 - 18}{41} = \frac{23}{41},$$

   т. е. $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right) = \boxed{\frac{23}{41}}$.

e*) Найдем $\cos\left(AB_1\widehat{C; A}D_1C\right)$.

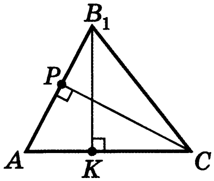


1. $\left(AB_1\widehat{C; A}D_1C\right) = \angle B_1\underline{AC}D_1$.

   Построим $\left.\begin{matrix} B_1K\perp AC \\ D_1M\perp AC \end{matrix}\right|$,

   тогда $\rho\left(\angle B_1\underline{AC}D_1\right) = \rho\left(B_1\widehat{K; D_1}M\right)$.

2. Рассмотрим $\triangle AB_1C$, используя результаты решения предыдущих пунктов.



   $CP = 2\sqrt{82}$ (напомним: $CP\perp AB_1$, $AC = B_1C$);

   $CP\cdot AB_1 = B_1K\cdot AC = 2\cdot S_{\triangle AB_1C}$;

   $B_1K = \dfrac{CP\cdot AB_1}{AC}$,

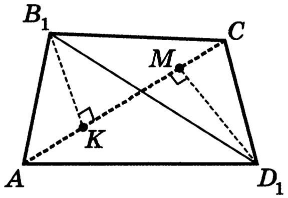
   т. е. $B_1K = \dfrac{2\sqrt{82}\cdot 12\sqrt{2}}{20} = \dfrac{48\sqrt{41}}{20} = \dfrac{12\sqrt{41}}{5}$.

3. $\triangle AB_1C = \triangle CD_1A$, так как $AB_1 = CD_1$, $B_1C = D_1A$ и $AC = CA$, значит $D_1M = B_1K = \dfrac{12}{5}\sqrt{41}$.

4. $AK = \sqrt{AB_1^2 - B_1K^2}$,

т. е. $AK = \sqrt{\left(12\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{5}\sqrt{41}\right)^2} = \frac{12}{5}\sqrt{25\cdot 2 - 41} =$
$= \frac{36}{5} = 7{,}2 = CM$;

$KM = AC - 2AK$; $KM = 20 - 2\cdot 7{,}2 = 5{,}6$.



5. Используя результаты задачи-теоремы (стр. 45), найдем $\cos(\angle B_1\underline{AC}D_1)$.

$\cos(\angle B_1\underline{AC}D_1) = \cos\left(B_1\widehat{K; D_1}M\right) =$

$$= \frac{2B_1K^2 + KM^2 - B_1D_1^2}{2B_1K^2} = \frac{2\left(2{,}4\sqrt{41}\right)^2 + 5{,}6^2 - 20^2}{2\left(2{,}4\sqrt{41}\right)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 2{,}4^2\cdot 41 - (20+5{,}6)(20-5{,}6)}{2\cdot 2{,}4^2\cdot 41} =$$

$$= \frac{8\cdot 1{,}2^2\cdot 41 - 25{,}6\cdot 14{,}4}{8\cdot 1{,}2^2\cdot 41} = \frac{8\cdot 1{,}2^2 - 41 - 256\cdot 1{,}2^2}{2\cdot 12^2\cdot 41} =$$

$$= \frac{8\cdot 41 - 256}{8\cdot 41} = \frac{41-32}{41} = \frac{9}{41}.$$

Таким образом, $\cos\left(AB_1\widehat{C; AD_1}C\right) = \boxed{\frac{9}{41}}$.

Вариант 2

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$AA_1 = 12$
$AD = 16$
$AB = 16$

Найдите:

а) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AC_1; ABCD}\right)$;

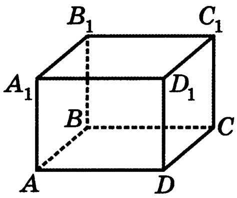
б) $\operatorname{tg}(\angle C\underline{AB_1}B)$;

в) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AA_1C_1C}\right)$;

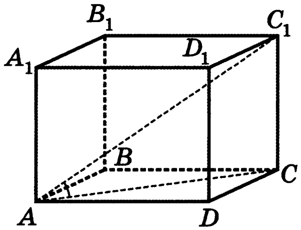
г) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB_1C_1D}\right)$;

д) $\cos\left(\widehat{AB_1D_1; CB_1D_1}\right)$;

е*) $\cos\left(\widehat{AB_1C; AB_1D_1}\right)$.



а) Найдем $\operatorname{tg}\left(\widehat{AC_1; ABCD}\right)$.



$CC_1 \perp ABCD$ (свойство прямоугольного параллелепипеда). Тогда $\left(\widehat{AC_1; ABCD}\right) = \angle C_1AC$.

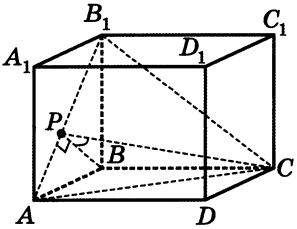
Значит $\operatorname{tg}\left(\widehat{AC_1; ABCD}\right) = \operatorname{tg}(\angle C_1AC)$;

$\operatorname{tg}(\angle C_1AC) = \dfrac{CC_1}{AC}$; $\quad AC = \sqrt{AD^2 + DC^2}$,

т. е. $AC = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$.

Получим, что $\operatorname{tg}(\angle C_1AC) = \dfrac{12}{16\sqrt{2}} = \boxed{\dfrac{3}{8}\sqrt{2}}$.

б) Найдем $\operatorname{tg}(\angle C\underline{AB_1}B)$.



1. $\angle C\underline{AB_1}B = \left(CA\widehat{B_1; A}B_1B\right)$;

   $CB \perp ABB_1A_1$ — свойство прямоугольного параллелепипеда.

   Построим $BP \perp AB_1$. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $CP \perp AB_1$.

   Значит $CPA \perp BB_1$, следовательно

   $\rho(\angle C\underline{AB_1}B) = \rho(\angle CPB)$, тогда $\operatorname{tg}(\angle CPB) = \dfrac{BC}{BP}$.

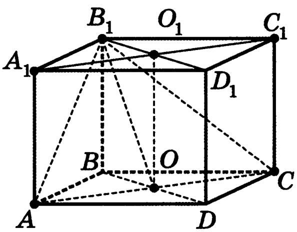
2. $AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2}$, т. е. $AB_1 = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20$;

   $2S_{\triangle AB_1B} = AB \cdot BB_1 = BP \cdot AB_1$,

   $BP = \dfrac{AB \cdot BB_1}{AB_1}$, т. е. $BP = \dfrac{16 \cdot 12}{20} = 9{,}6$.

3. $\operatorname{tg}(\angle C\underline{AB_1}B) = \dfrac{16}{9{,}6} = \dfrac{160}{96} = \boxed{\dfrac{5}{3}}$.

в) Найдем $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}A_1C_1C\right)$.



1. $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}A_1C_1C\right) = \operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}C_1) = \operatorname{tg}(\angle B_1OO_1)$.

$BB_1 \perp ABCD$.

Построим OO_1, где точка $O_1 = A_1C_1 \cap B_1D_1$,

а точка $O = AC \cap BD$.

Так как $ABCD$ — квадрат ($BD \perp AC$), то $BO \perp AC$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $B_1O \perp AC$.

Так как $OO_1 \parallel AA_1$ и AA_1C_1C — прямоугольник, то $OO_1 \perp AC$. Значит $B_1OA_1 \perp OC$, следовательно, $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}A_1C_1C\right) = \operatorname{tg}(\angle B_1OO_1)$.

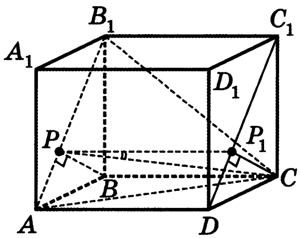
2. $B_1D_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1D_1^2}$;

$B_1D_1 = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$;

$B_1O_1 = \frac{1}{2}B_1D_1 = 8\sqrt{2}$; $\quad OO_1 = AA_1 = 12$. Значит

$\operatorname{tg}(\angle B_1OO_1) = \frac{B_1O_1}{OO_1}$, т. е. $\operatorname{tg}(\angle B_1OO_1) = \frac{8\sqrt{2}}{12} = \boxed{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

г) Найдем $\operatorname{tg}\left(AB_1\widehat{C; A}B_1C_1D\right)$.

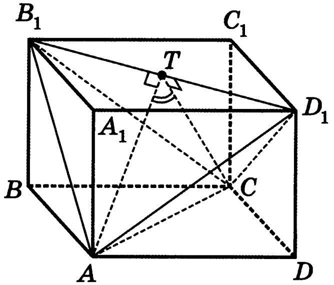


1. $\left(AB_1\widehat{C; A}B_1C_1D\right) = \angle C\underline{B_1A}D$; $\quad BC \perp AA_1B_1B$.

Построим $BP \perp AB_1$, значит по теореме о трех перпендикулярах $CP \perp AB_1$.

2. Построим $PP_1 \parallel AD$, где $P_1 \in DC_1$.
Так как $AD \perp ABB_1A_1$, то $AD \perp AB_1$.
Учитывая, что $PP_1 \parallel AD_1$, $PP_1 \perp AB_1$.
Тогда $P_1PA \perp CB_1$.
Значит $\operatorname{tg}\left(\widehat{AB_1C; AB}_1C_1D\right) = \operatorname{tg}(\angle P_1PC) = \dfrac{P_1C}{PP_1}$;
$P_1C = PB = 9{,}6$; $PP_1 = AD = 16$,
т. е. $\operatorname{tg}(\angle P_1PC) = \dfrac{9{,}6}{16} = \boxed{\dfrac{3}{5}}$.

д) Найдем $\cos(AB_1D_1; CB_1D_1)$.



1. $\left(AB_1\widehat{D_1; C}B_1D_1\right) = \angle A\underline{B_1D_1}C$.
$\triangle AB_1D_1 = \triangle CD_1B_1$,
так как $AB_1 = CD_1$, $AD_1 = CB_1$
и B_1D_1 — общая ($B_1D_1 = D_1B_1$).
При этом $AB_1 = AD_1 = CD_1 = CB_1 = 20$.
Построим $CT \perp B_1D_1$.
Тогда так как $\triangle AB_1D_1 = \triangle CD_1B_1$,
то $AT \perp B_1D_1$ и $AT = CT$.
Тогда $B_1D_1 \perp ATC$, значит
$\rho\left(AB_1\widehat{D_1; C}B_1D_1\right) = \rho(\angle A\underline{B_1D_1}C) = \rho(\angle ATC)$,
т. е. $\cos\left(AB_1\widehat{D_1; C}B_1D_1\right) = \cos(\angle ATC)$.

2. Из $\triangle AB_1D_1$ ($AB_1 = AD_1$),
учитывая, что $B_1D_1 = 16\sqrt{2}$ и $B_1T = TD_1 = 8\sqrt{2}$,
получим:

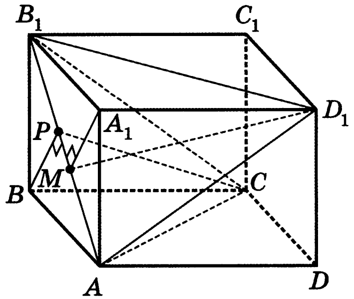
$$AT = \sqrt{AB_1^2 - B_1T^2}; \quad AT = \sqrt{20^2 - 8\sqrt{2}^2} = \sqrt{272};$$

$$\cos(\angle ATC) = \frac{AT^2 + CT^2 - AC^2}{2AT \cdot CT} = 1 - \frac{AC^2}{2AT^2} \ (AT = CT).$$

$$\cos(\angle ATC) = 1 - \frac{256 \cdot 2}{2 \cdot 272} = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}.$$

Значит $\cos\left(AB_1\widehat{D_1; C}B_1D_1\right) = \boxed{\frac{1}{17}}$.

e*) Найдем $\cos\left(AB_1\widehat{C; A}B_1D_1\right)$.



1. $\rho\left(AB_1\widehat{C; A}B_1D_1\right) = \rho\left(\angle C\underline{\widehat{AB_1}}D_1\right)$.

Ранее было доказано:

$CP \perp AB_1$, $CB \perp BP$ ($CB \perp BB_1A$).

Из $\triangle CPB$ $CP = \sqrt{CB^2 + BP^2}$,

т. е. $CP = \sqrt{16^2 + 9{,}6^2} = 1{,}6\sqrt{100 + 36} = \frac{12}{5}\sqrt{41}$.

2. $PB_1 = \sqrt{BB_1^2 - PB^2}$;

$$PB_1 = \sqrt{12^2 - 9{,}6^2} = \sqrt{(12 + 9{,}6)(12 - 9{,}6)} =$$

$$= \sqrt{21{,}6 \cdot 2{,}4} = 0{,}1\sqrt{6^3 \cdot 6 \cdot 4} = \frac{72}{10} = 7{,}2.$$

3. Проведем $D_1M \perp AB_1$.

   Так как $B_1D_1 = AC$; $AB_1 = B_1A$; $B_1C = AD_1$,

   то $\triangle AB_1C = \triangle B_1AD_1$.

   Тогда $D_1M = CP$ и $PB_1 = AM$.

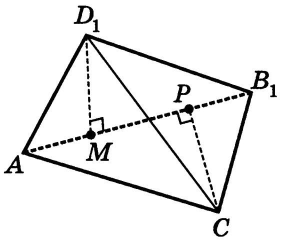
   Учтем, что $AC > CB_1$,

   так как $16\sqrt{2} > 20$, $4\sqrt{2} > 5$, $32 > 25$,

   тогда $PM = AB_1 - 2PB_1$, т. е. $PM = 20 - 2 \cdot 7{,}2 = 5{,}6$.

4. Рассмотрим $\angle C\underline{AB_1}D_1$.

   Используя результаты задачи-теоремы (стр. 45), найдем $\cos(\angle C\underline{AB_1}D_1)$.



$$\boxed{\cos(\angle C\underline{AB_1}D_1) = \frac{D_1M^2 + CP^2 + PM^2 - D_1C^2}{2D_1M \cdot CP}};$$

$$\cos(\angle C\underline{AB_1}D_1) = \frac{2\left(\frac{12}{5}\sqrt{41}\right)^2 + 5{,}6^2 - 20^2}{2\left(\frac{12}{5}\sqrt{41}\right)^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 144 \cdot 41 + 28^2 - 100^2}{2 \cdot 256 \cdot 34} = \frac{2 \cdot 144 \cdot 41 - 128 \cdot 72}{2 \cdot 144 \cdot 41} =$$

$$= 1 - \frac{2 \cdot 144 \cdot 32}{2 \cdot 144 \cdot 41} = 1 - \frac{32}{41} = \boxed{\frac{9}{41}}.$$

$$\cos\left(A_1B_1\widehat{C; A}B_1D_1\right) = \boxed{\frac{9}{41}}.$$

Тренировочная работа 2 (Нахождение углов в правильной пирамиде)

Вариант 1

Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равны a. Найдите:

а) боковое ребро;

б) угол между боковыми ребрами грани;

в) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

г) двугранный угол при стороне основания;

д) двугранный угол при боковом ребре.

Вариант 2

В правильной треугольной пирамиде высота пирамиды равна a, а сторона основания равна $2a$. Найдите:

а) боковое ребро;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

в) двугранный угол при стороне основания;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) угол между боковым ребром и плоскостью боковой грани.

Решение тренировочной работы 2

Вариант 1

Высота и сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равны a. Найдите:

а) боковое ребро;

б) угол между боковыми ребрами грани;

в) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

г) двугранный угол при стороне основания;

д) двугранный угол при боковом ребре.

Дано:

$SABCD$ — правильная пирамида

$H_{SABCD} = a$

$AB = a$

Найдите:

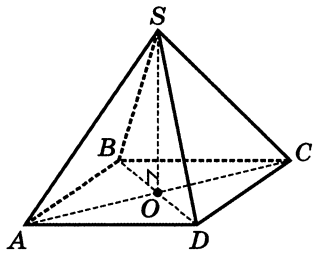
а) SD;

б) $\angle DSC$;

в) $\left(\widehat{SC; ABCD}\right)$;

г) $\angle S\underline{DC}B$;

д) $\angle B\underline{SC}D$.



а) Проведем $SO \perp ABCD$, тогда $SO = H_{SABCD}$.

Так как $SABCD$ — правильная пирамида, то O — центр описанной около основания окружности.

$SD = \sqrt{OS^2 + OD^2}$.

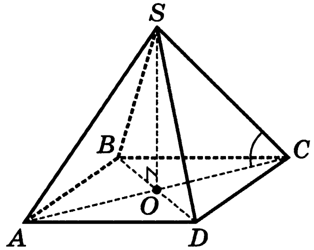
1. $OD = \dfrac{1}{2}BD$; $OD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ $\left(BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}\right)$.

2. $SD = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{2}} = a\sqrt{\dfrac{3}{2}} = \boxed{\dfrac{a}{2}\sqrt{6}}$.

б) Найдем $\angle DSC$. $SD = \frac{a}{2}\sqrt{6}$. Используя теорему косинусов, получим $\cos(\angle DSC) = \frac{2 \cdot SD^2 - DC^2}{2 \cdot SD^2}$;

$$\cos(\angle DSC) = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}a^2 - a^2}{2 \cdot \frac{3}{2}a^2} = \frac{2}{3}; \quad \angle DSC = \boxed{\arccos \frac{2}{3}}.$$

в) Найдем $\left(\widehat{SC; ABCD}\right)$.

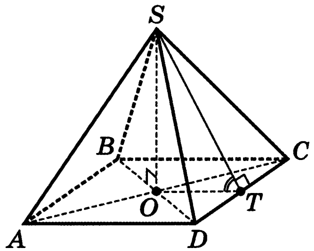


OC — ортогональная проекция SC на $ABCD$, тогда $\left(\widehat{SC; ABCD}\right) = \angle SCO$. Значит

$$\operatorname{tg}(\angle SCO) = \frac{OS}{OC};$$

$$\operatorname{tg}(\angle SCO) = \frac{a}{\frac{a}{2}\sqrt{2}} = \sqrt{2}; \quad \angle SCO = \boxed{\operatorname{arctg}\sqrt{2}}.$$

г) Найдем $\angle S\underline{DC}B$.



1. Построим $OT \perp DC$, значит по теореме о трех перпендикулярах $ST \perp DC$,

т. е. $\left.\begin{array}{l} OT \perp DC \\ ST \perp DC \end{array}\right| \Rightarrow DC \perp OST$ и $\angle S\underline{DC}B = \angle STO$.

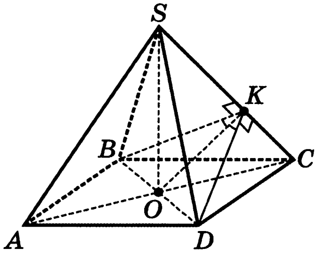
Примечание. $\angle S\underline{DC}B = \angle STO$ — в записи равенства в таких случаях по умолчанию понимается равенство мер этих углов, т. е. равенство значений этих углов.

2. $\operatorname{tg}(\angle STO) = \frac{OS}{OT}$; $\operatorname{tg}(\angle STO) = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2$;

$\angle STO = \boxed{\operatorname{arctg} 2}$.

д) Найдем $\angle B\underline{SC}D$.

Первый способ



1. Так как $\triangle SBC = \triangle SDC$, то если построить $DK \perp SC$, то и $BK \perp SC$, тогда $SC \perp BDK$.

   Значит $\angle B\underline{SC}D = \angle BKD$, но тогда и $OK \perp SC$ и так как $BK = DK$, то $\angle OKD = \dfrac{1}{2}\angle BKD$.

   Следовательно, $\angle BKD = 2(\angle OKD)$.

2. Рассмотрим $\triangle SOC$.

   $$OK = \frac{OS \cdot OC}{SC}; \quad OK = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

3. $\operatorname{tg}(\angle OKD) = \dfrac{OD}{OK}$; $\operatorname{tg}(\angle OKD) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{\dfrac{2}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$,

   значит $\angle OKD = \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Так как $\angle BKD = 2(\angle OKD)$, то $\angle BKD = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Учтем, что $\sqrt{\dfrac{3}{2}} > 1$, тогда $\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}} > \operatorname{arctg} 1 = 45^\circ$,

значит $\angle BKD > 90^\circ$.

Второй способ

1. $\cos(\angle DSC) = \dfrac{2}{3}$, тогда $\sin(\angle DSC) = \sqrt{1 - \dfrac{4}{9}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

2. Рассмотрим $\triangle SKD$.

   $DK = SD \cdot \sin(\angle DSC)$; $\quad DK = a\sqrt{\dfrac{3}{2}} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = \dfrac{a}{3}\sqrt{\dfrac{15}{2}}$.

3. Рассмотрим $\triangle BDK$.

   $BK = DK$ (см. первый способ).

   $\cos(\angle BKD) = \dfrac{2DK^2 - BD^2}{2DK^2}$;

   $$\cos(\angle BKD) = \frac{2 \cdot \frac{15}{18}a^2 - 2a^2}{2 \cdot \frac{15}{18}a^2} = \frac{30 - 36}{30} = -\frac{6}{30} = -0{,}2.$$

   т. е. $\angle BKD = \boxed{180^\circ - \arccos(0{,}2)}$.

При желании можно доказать, что

$2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3}{2}} = 180^\circ - \arccos(0{,}2)$.

Вариант 2

В правильной треугольной пирамиде высота пирамиды равна a, а сторона основания равна $2a$. Найдите:

а) боковое ребро;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

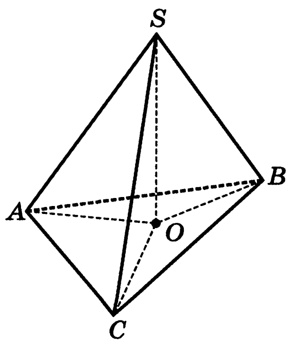
в) двугранный угол при стороне основания;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) угол между боковым ребром и плоскостью боковой грани.

Дано:
$SABC$ — правильная пирамида
$H_{SABC} = a$
$AB = 2a$

Найти:
а) SB;
б) $\left(\widehat{SB; ABC}\right)$;
в) $\angle S\underline{CB}A$;
г) $\angle A\underline{SB}C$;
д) $\left(\widehat{SB; ASC}\right)$.

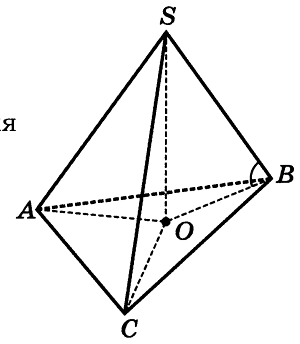


а) Найдем SB.

1. Построим $SO \perp ABC$, тогда $SO = H_{SABC}$.
Так как $SABC$ — правильная пирамида,
то $AS = BS = CS$, O — центр описанной окружности около $\triangle ABC$, а $\triangle ABC$ — правильный треугольник.
$$R_{\text{о}} = OB = \frac{2a}{2\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}a\sqrt{3} \quad \left(R_{\text{о}} = \frac{AC}{2\sin B}\right).$$

2. $SB = \sqrt{SO^2 + OB^2}$;
$$SB = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2}{3}a\sqrt{3}\right)^2} = a\sqrt{\frac{7}{3}} = \boxed{\frac{a\sqrt{21}}{3}}.$$

б) Найдем $\left(\widehat{SB; ABC}\right)$.



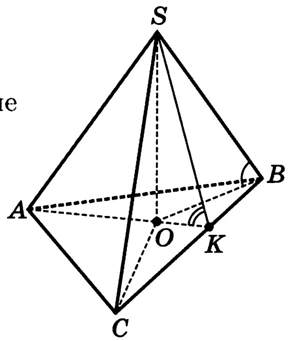
1. OB — ортогональная проекция SB на ABC, тогда $\left(\widehat{SB; ABC}\right) = \angle SBO$.

2. $\operatorname{tg}(\angle SBO) = \dfrac{OS}{OB}$;

   $\operatorname{tg}(\angle SBO) = \dfrac{a}{\frac{2}{3}a\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\angle SBO = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

   Тогда $\boxed{\left(\widehat{SB; ABC}\right) = \left(\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}$.

в) Найдем $\angle S\underline{CB}A$.



1. Построим $OK \perp CB$. По теореме о трех перпендикулярах $SK \perp CB$, тогда
   $\left.\begin{array}{l} SK \perp CB \\ OK \perp CB \end{array}\right| \Rightarrow CB \perp OSK$,
   значит $\angle S\underline{CB}A = \angle SKO$.

2. Так как $\triangle ABC$ — правильный, то если построить $AK \perp CB$, то $OK = \dfrac{1}{3}AK$ (так как точка O — центр окружности — есть пересечение медиан).

   $AK = AC\sin 60°$; $AK = a\sqrt{3}$; $OK = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

3. $\operatorname{tg}(\angle SKO) = \dfrac{OS}{OK}$; $\angle SKO = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{3}$,

   т. е. $\angle SKO = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°$. Значит $\boxed{\angle S\underline{CB}A = 60°}$.

г) Найдем $\angle A\underline{SB}C$.

1. Построим $CM \perp SB$.

   Так как $\triangle ASB = \triangle CSB$,

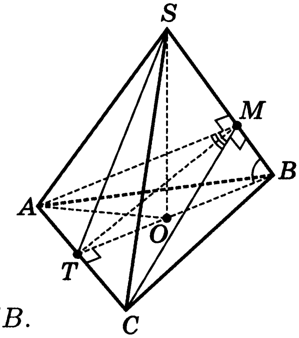
   то $AM \perp SB$.

   Значит $SB \perp AMC$, тогда

   $\angle A\underline{SB}C = \angle AMC$.

   Построим $BT \perp AC$ $(O \in BT)$,

   тогда $AT = TC$, значит $TM \perp SB$.



2. Так как $AM = CM$ и $AT = TC$, то $\angle AMT = \angle CMT$;

   $\angle CMT = \dfrac{1}{2}\angle AMC$.

3. $\sin(\angle SBO) = \dfrac{OS}{SB}$, т. е. $\sin(\angle SBO) = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{21}}{3}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}}$.

   Тогда $TM = TB\sin(\angle SBO)$ $(TM \perp SB)$,

   где $TB = CB\sin 60°$; $TB = a\sqrt{3}$.

   Значит $TM = a\sqrt{3}\cdot\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \dfrac{3}{7}a\sqrt{7}$.

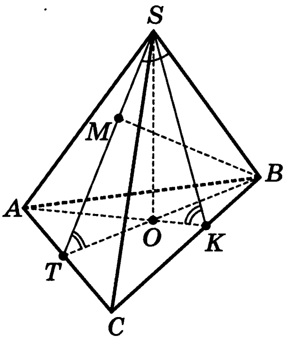
4. $\operatorname{tg}(\angle CMT) = \dfrac{TC}{TM}$;

   $\operatorname{tg}(\angle CMT) = \dfrac{a}{\frac{3}{7}a\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$, значит $\angle CMT = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

   Тогда $\angle CMA = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

   Таким образом, $\boxed{\angle A\underline{SB}C = 2\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{7}}{3}}$.

д) Найдем $\left(\widehat{SB; ASC}\right)$.



1. Так как пирамида $SABC$ — правильная, значит O — центр описанной и вписанной окружностей для $\triangle ABC$, и $\angle S\underline{AC}B = \angle S\underline{CB}A = \angle S\underline{BA}C$, т. е. $\angle SKO = \angle STO = 60°$ (см. пункт в).

2. Построим $BM \perp ST$.

   Тогда так как $AC \perp STB$, то $AC \perp BM$.

   Следовательно, $BM \perp ASC$,

   значит $\left(\widehat{SB; ASC}\right) = \angle BST$.

3. Рассмотрим $\triangle TSB$. По теореме синусов

$$\frac{TB}{\sin(\angle TSB)} = \frac{SB}{\sin(\angle STB)}; \quad \sin(\angle TSB) = \frac{TB}{SB} \cdot \sin 60°;$$

$$\sin(\angle TSB) = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{\frac{7}{3}}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = \frac{3\sqrt{21}}{14};$$

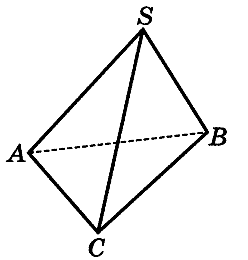
$$\angle TSB = \arcsin\left(\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right) = \arcsin\frac{3\sqrt{21}}{14}.$$

Таким образом, $\boxed{\left(\widehat{SB; ASC}\right) = \arcsin\frac{3\sqrt{21}}{14}}$.

Домашняя самостоятельная работа

1. Дано:

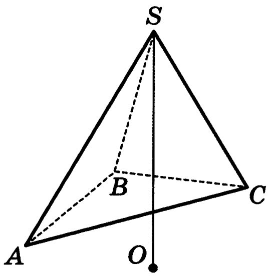
$SABC$ — пирамида
$\left(\widehat{AS;ABC}\right) = \left(\widehat{BS;ABC}\right) =$
$= \left(\widehat{CS;ABC}\right)$
$AB = 24$
$AC = 10$
$CB = 26$



Найдите:
а) площадь наибольшей боковой грани $S_{\text{наиб}}$;
б) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{AC}B) : \operatorname{tg}(\angle S\underline{AB}C)$.

2. Дано:

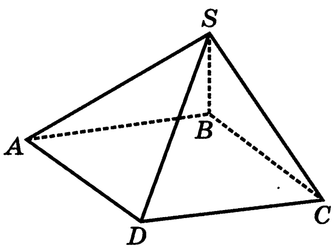
$SABC$ — пирамида
$\left(\widehat{AS;ABC}\right) = \left(\widehat{BS;ABC}\right) =$
$= \left(\widehat{CS;ABC}\right) = 45°$
$AB = BC$
$\angle ABC = 120°$
$H_{SABC} = 16$



Найдите:
а) $S_{\triangle ASC}$;
б) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{BA}C)$.

3. Дано:

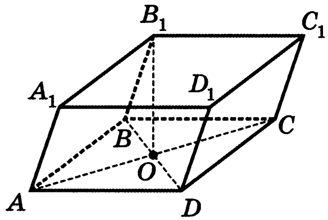
$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — ромб
$\left(\widehat{SA;ABCD}\right) = 30°$
$SB \perp ABCD$
$\angle ABC = 120°$



Найдите:
а) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{AD}C) : \operatorname{tg}(\angle S\underline{AC}B)$;
б) $\cos(\angle A\underline{SD}C)$.

4. Дано:

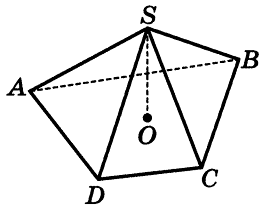
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед
$\angle ABC = 120°$
$ABCD$ — ромб
$AC \cap BD = O$
$B_1O \perp ABCD$
$\left(\widehat{BB_1; AB_1C}\right) = 30°$
$AB = a$



Найдите:
а) $S_{\text{б.п.п}}$; б) $S_{AB_1C_1D}$.

5. Дано:

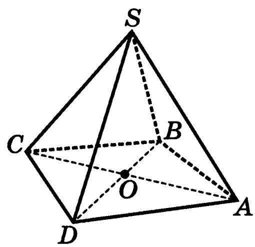
$SABCD$ — пирамида
O — центр вписанной в основание окружности
$AB \parallel DC$
$AD = BC$
$SO \perp ABCD$
$\angle S\underline{AD}C = 60°$
$AB = 3a$, $DC = a$



Найдите:
а) $S_{\text{б.п}}$; б) H_{SABCD}; в) $\left(\widehat{AS; ABCD}\right)$.

6. Дано:

$SB \perp ABCD$
$ABCD$ — ромб
$AC \cap BD = O$
$\left(\widehat{SA; ABCD}\right) = 45°$
$\left(\widehat{SD; ABCD}\right) = 30°$



Найдите:
а) $\mathrm{tg}(\angle S\underline{AD}C)$; б) $\mathrm{tg}(\angle S\underline{AC}B)$.

Тренировочная работа 3 (Нахождение углов и площадей элементарных сечений)

Вариант 1

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а диагональ основания равна 10. Найдите:

а) плоский угол грани при вершине пирамиды;

б) двугранный угол при основании пирамиды;

в) угол между боковым ребром и плоскостью диагонального сечения пирамиды;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) площадь сечения, проходящего через диагональ основания и параллельного боковому ребру.

Вариант 2

Высота правильной треугольной пирамиды равна 24, а высота треугольника основания равна 21. Найдите:

а) плоский угол грани при вершине пирамиды;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

в) двугранный угол при основании;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) площадь сечения, проходящего через высоту основания и параллельного боковому ребру.

Тренировочная работа 3. Моделирование условий

Вариант 1

Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 12, а диагональ основания равна 10. Найдите:

а) плоский угол грани при вершине пирамиды;

б) двугранный угол при основании пирамиды;

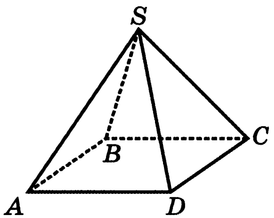
в) угол между боковым ребром и плоскостью диагонального сечения пирамиды;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) площадь сечения, проходящего через диагональ основания и параллельного боковому ребру.

Дано:

$SABCD$ — правильная пирамида
$H_{SABCD} = 12$
$AC = 10$



Найдите:

а) $\angle DSC$;
б) $\angle S\underline{DC}B$;
в) $\left(\widehat{AS; BSD}\right)$;
г) $\angle B\underline{SC}D$;
д) $S_{\triangle BDK}$, где $BDK \parallel AS$; $K \in CS$.

Вариант 2

Высота правильной треугольной пирамиды равна 24, а высота треугольника основания равна 21. Найдите:

а) плоский угол грани при вершине пирамиды;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

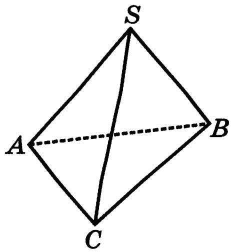
в) двугранный угол при основании;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) площадь сечения, проходящего через высоту основания и параллельного боковому ребру.

Дано:

$SABC$ — правильная пирамида
$H_{SABC} = 24$
В $\triangle ABC$ $H_{AC} = 21$



Найдите:

а) $\angle CSB$;

б) $\left(\widehat{SB; ABC}\right)$;

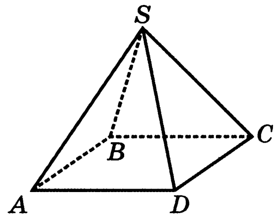
в) $\angle S\underline{CB}A$;

г) $\angle A\underline{SB}C$;

д) $S_{\triangle AKD}$, где $AKD \parallel SC$, $AK \perp CB$, $K \in CB$.

Решение тренировочной работы 3

Вариант 1



Дано:

$SABCD$ — правильная пирамида
$H_{SABCD} = 12$
$AC = 10$

Найдите:

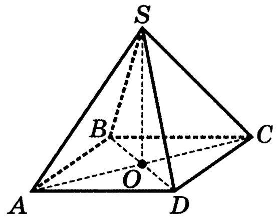
а) $\angle DSC$;

б) $\angle S\underline{DC}B$;

в) $\left(\widehat{AS; BSD}\right)$;

г) $\angle B\underline{SC}D$;

д) $S_{\triangle BDK}$, где $BDK \parallel AS$; $K \in CS$.



а) Найдем $\angle DSC$.

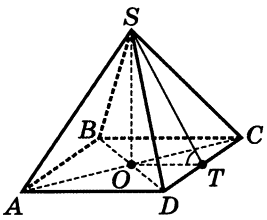
1. Дополнительное построение:
$SO \perp ABCD$, тогда
$SO = H_{SABCD} = a$.
Так как $SABCD$ правильная, точка O — центр вписанной и описанной окружности, одновременно являющийся точкой пересечения диагоналей.

2. Так как $ABCD$ — квадрат, то
$$DC = AC\cos 45^\circ; \quad DC = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{5\sqrt{2}}.$$

3. $SC = \sqrt{OS^2 + OC^2}$ $\left(OC = \dfrac{1}{2}AC;\ H_{ABCD} = OS\right)$;
$$SC = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13.$$

4. $\cos(\angle DSC) = \dfrac{SD^2 + SC^2 - DC^2}{2SD \cdot SC}$ $(SD = SC)$;
$$\cos(\angle DSC) = \frac{2 \cdot 13^2 - 25 \cdot 2}{2 \cdot 13^2} = \frac{144}{169}, \quad \boxed{\angle DSC = \arccos\frac{144}{169}}.$$

б) Найдем $\angle S\underline{DC}B$.



1. Построим $OT \perp DC$, тогда так как $OS \perp ABCD$, то по теореме о трех перпендикулярах $ST \perp DC$.

   Значит $DC \perp OST$. Таким образом, получили, что $\angle S\underline{DC}B = \angle STO$.

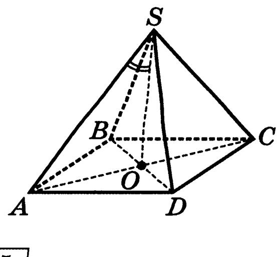
2. $OT = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{1}{2}DC$; $\quad OT = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

3. Рассмотрим $\triangle OST$.

   $\mathrm{tg}(\angle STO) = \dfrac{OS}{OT}$; $\quad \mathrm{tg}(\angle STO) = \dfrac{12}{\frac{5\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{12}{5}\sqrt{2}$,

   т. е. $\angle STO = \mathrm{arctg}\,\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$; $\quad \boxed{\angle S\underline{DC}B = \mathrm{arctg}\,\dfrac{12\sqrt{2}}{5}}$.

в) Найдем $\left(\widehat{AS;BSD}\right)$.



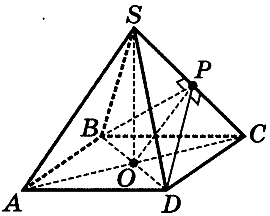
1. Так как $\left.\begin{matrix} AO \perp BD \\ AO \perp OS \end{matrix}\right| \Rightarrow AO \perp BSD$.

   Значит $\left(\widehat{AS;BSD}\right) = \angle ASO$.

2. $\mathrm{tg}(\angle ASO) = \dfrac{AO}{OS}$; $\quad \mathrm{tg}(\angle ASO) = \boxed{\dfrac{5}{12}}$,

   т. е. $\angle ASO = \mathrm{arctg}\,\dfrac{5}{12}$; $\quad \boxed{\left(\widehat{AS;BSD}\right) = \mathrm{arctg}\,\dfrac{5}{12}}$.

г) Найдем $\angle B\underline{SC}D$.



Первый способ

1. Построим $BP \perp SC$ $(P \in SC)$.
   Так как $\triangle SBC = \triangle SCD$, то $DP \perp SC$,
   значит $SC \perp BPD$.
   Значит, по признаку перпендикулярности прямой и плоскости $OP \perp SC$, тогда $\angle B\underline{SC}D = \angle BPD$.

2. Рассмотрим $\triangle SOC$.
   $$2S_{\triangle SOC} = SO \cdot OC = OP \cdot SC; \quad OP = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}.$$

3. $\operatorname{tg}(\angle OPD) = \dfrac{OD}{OP}$;
   $$\operatorname{tg}(\angle OPD) = \frac{5}{\frac{60}{13}} = \frac{13}{12}, \text{ т. е. } \angle OPD = \operatorname{arctg}\frac{13}{12}.$$
   Так как $OP \perp BD$, то $\angle BPD = 2(\angle OPD)$,
   $$\text{тогда } \angle BPD = 2\operatorname{arctg}\frac{13}{12}; \quad \boxed{\angle B\underline{SC}D = 2\operatorname{arctg}\frac{13}{12}}.$$

   Для нахождения $\operatorname{tg}(\angle BPD)$ возможен другой подход:
   $$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (\alpha = \angle OPD);$$
   $$\operatorname{tg}(\angle BPD) = \frac{2 \cdot \frac{13}{12}}{1 - \left(\frac{13}{12}\right)^2} = \frac{2 \cdot 13 \cdot 12}{-25} = -\frac{312}{25};$$
   $$\angle BPD = \operatorname{arctg}\left(-\frac{312}{25}\right); \quad \boxed{\angle B\underline{SC}D = \operatorname{arctg}\left(-\frac{312}{24}\right)}.$$

Второй способ

1. $SBDC = SBDP + CBDP$, где $SC = SP + PC$, причем $V_{SBDP} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDP} \cdot SP$ и $V_{CBDP} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDP} \cdot PC$,

   тогда

$$\left. \begin{array}{l} V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDP} \cdot SC \\ V_{SBCD} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{\triangle BDC} \cdot SO \end{array} \right| ; \qquad \begin{array}{l} S_{\triangle BDP} = \dfrac{S_{\triangle BDC} \cdot SO}{SC} \\ S_{\triangle BDP} = \dfrac{5^2 \cdot 12}{13} = \dfrac{300}{13} \end{array}.$$

2. $S_{\triangle BDP} = OP \cdot OD$, т. е. $OP = \dfrac{S_{\triangle BDP}}{OD}$;

$$OP = \frac{300}{13 \cdot 5} = \frac{60}{13}.$$

3. $DP = \sqrt{OD^2 + OP^2}$; $DP = \sqrt{5^2 + \left(\dfrac{60}{13}\right)^2} = \dfrac{5\sqrt{313}}{13}$.

4. $\cos(\angle BPD) = \dfrac{2DP^2 - BD^2}{2DP^2}$;

$$\cos(\angle BPD) = \frac{2 \cdot \frac{25 \cdot 313}{169} - 100}{2 \cdot \frac{25 \cdot 313}{169}} = \frac{50 \cdot 313 - 16900}{50 \cdot 313} =$$

$$= \frac{313 - 2 \cdot 169}{313} = -\frac{25}{313}.$$

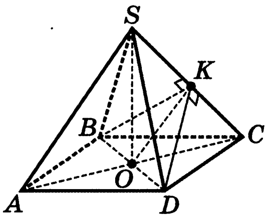
$$\arccos(\angle BPD) = 180^\circ - \arccos\frac{25}{313} \ (\angle BPD > 90^\circ);$$

$$\boxed{\angle B\underline{SC}D = 180^\circ - \arccos\frac{25}{313}}.$$

Можно доказать, что

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{312}{25}\right) = 180^\circ - \arccos\frac{25}{313} = 2\operatorname{arctg}\frac{13}{12}.$$

д) Найдем $S_{\triangle BDK}$, где $BDK \parallel AS$; $K \in CS$.



1. Так как $AS \parallel BDK$, то $AS \parallel OK$.

   Рассмотрим $\triangle ACS$.

   Так как $AO = OC$ и $AS \parallel OK$, то OK — средняя линия $\triangle ACS$, а значит $SK = KC$ и $OK = \frac{1}{2}AS$.

2. $OK = \frac{1}{2} \cdot 13 = 6{,}5$, тогда $AS = 13$ (см. пункт а).

3. Можно доказать, что $OK \perp BD$ (см. пункт г).

   $S_{\triangle BKD} = \frac{1}{2} OK \cdot BD$,

   где $BD = \sqrt{DC^2 + BC^2}$.

   Значит $BC = DC = 5\sqrt{2}$. Найдем BD:

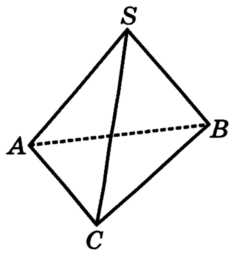
   $BD = \sqrt{25 \cdot 2 + 25 \cdot 2} = 10$;

   $S_{\triangle BKD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} \cdot 10 = \boxed{32{,}5}$ (кв. ед.).

Вариант 2

Дано:

$SABC$ — правильная пирамида
$H_{SABC} = 24$
В $\triangle ABC$ $H_{AC} = 21$



Найдите:

а) $\angle CSB$;

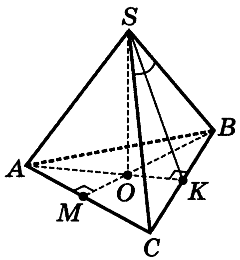
б) $\left(\widehat{SB; ABC}\right)$;

в) $\angle S\underline{CB}A$;

г) $\angle A\underline{SB}C$;

д) $S_{\triangle AKD}$, где $AKD \parallel SC$, $AK \perp CB$, $K \in CB$.

а) Найдем $\angle CSB$.



1. Построим $AK \perp CB$ и $BM \perp AC$.

   Так как $\triangle ABC$ — правильный, то

   $BM = H_{AC} = H_{CB} = AK = 21$.

   Построим $SO \perp ABC$, тогда $SO = H_{SABCD}$.

   Учтем, что $SABC$ — правильная пирамида, O — центр вписанной и описанной окружности и точка пересечения медиан $\triangle ABC$, тогда

   $OK = \dfrac{1}{3} \cdot AK; \quad OK = 7.$

2. $H_{SABC} = OS = 24$. Из $\triangle SOK$:

   $SK = \sqrt{OS^2 + OK^2}; \quad SK = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25.$

3. Рассмотрим $\triangle ABC$.

   $AC = BC = AB; \quad CK = \dfrac{1}{2} AC.$

   В $\triangle ACK$ $AC = \dfrac{AK}{\sin 60°}; \quad AC = \dfrac{21}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 14\sqrt{3}.$

4. Так как $OS \perp ABC$, то по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp CB$.

Из $\triangle CSK$: $\operatorname{tg}(\angle CSK) = \dfrac{CK}{SK}$; $\operatorname{tg}(\angle CSK) = \dfrac{7\sqrt{3}}{25}$.

Так как $\angle CSB = 2(\angle CSK)$, то $\boxed{\angle CSB = 2\operatorname{arctg}\dfrac{7\sqrt{3}}{25}}$,

или $\operatorname{tg}(\angle CSB) = \dfrac{2\operatorname{tg}(\angle CSK)}{1-\operatorname{tg}^2(\angle CSK)}$; $\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$

$(\alpha = \angle CSK)$.

$$\operatorname{tg}(\angle CSB) = \frac{\frac{2\cdot 7\sqrt{3}}{25}}{1-\frac{49\cdot 3}{25^2}} = \frac{2\cdot 7\cdot\sqrt{3}\cdot 25}{625-147} =$$

$$= \frac{2\cdot 7\cdot 25\sqrt{3}}{478} = \frac{175\sqrt{3}}{239};$$

$$\boxed{\angle CSB = \operatorname{arctg}\left(\frac{175\sqrt{3}}{239}\right)}.$$

Можно иначе.

1. $AO = \dfrac{2}{3}AK$, т. е. $AO = 14$.

2. $AS = \sqrt{AO^2 + OS^2}$; $AS = \sqrt{24^2+14^2} = \sqrt{772}$.

3. $AC = \dfrac{AK}{\sin 60^\circ}$; $AC = 14\sqrt{3}$.

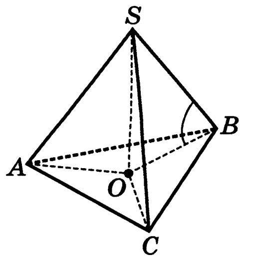
4. $\cos(\angle CSB) = \dfrac{2\cdot SC^2 - CB^2}{2\cdot SC^2}$;

$$\cos(\angle CSB) = \frac{2\cdot 772 - 196\cdot 3}{2\cdot 772} = \frac{239}{386};$$

$$\boxed{\cos(\angle CSB) = \frac{239}{386}}.$$

б) Найдем $\left(\widehat{SB;ABC}\right)$.

Можно доказать, что $\left(\widehat{SB;ABC}\right) = \angle SBO$ ($SO \perp ABC$).



$\operatorname{tg}(\angle SBO) = \dfrac{OS}{OB}$ (так как точка O — центр окружности, по совместительству точка пересечения медиан, то $OB = \dfrac{2}{3}BM$; $OB = \dfrac{2}{3} \cdot 21 = 14$);

$\operatorname{tg}(\angle SBO) = \dfrac{24}{14} = \dfrac{12}{7}$; $\left(\widehat{SB;ABC}\right) = \angle SBO = \boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{12}{7}}$.

в) Найдем $\angle S\underline{CB}A$.

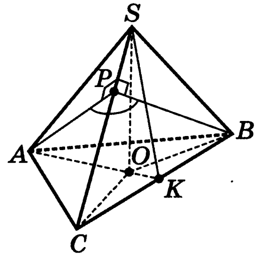
Так как $CB \perp AK$ и $CB \perp SK$, то $CB \perp ASK$,

значит $\angle S\underline{CB}A = \angle SKO$ (см. пункт а).

$\operatorname{tg}(\angle SKO) = \dfrac{OS}{OK}$, т. е. $\operatorname{tg}(\angle SKO) = \dfrac{24}{7}$;

$\angle SKO = \boxed{\operatorname{arctg}\dfrac{24}{7}}$.

г) Найдем $\angle A\underline{SC}B$.



1. Так как $SABC$ — правильная, то $\triangle ASC = \triangle CSB$. Построим $AP \perp SC$, тогда из равенства треугольников ASC и CSB следует, что $BP \perp SC$.

   Значит $SC \perp APB$, тогда $\angle A\underline{SC}B = \angle APB$.

Учтем, что $S_{\triangle CSB} = \frac{1}{2} CB \cdot SK$ ($SK \perp CB$)

и $S_{\triangle CSB} = \frac{1}{2} \cdot BP \cdot SC$, тогда $CB \cdot SK = BP \cdot SC$.

Так как $OA = \frac{2}{3} AK$, то $OA = 14$.

Известно, что $AS = SB = SC = \sqrt{OS^2 + OB^2}$,

тогда $SC = \sqrt{24^2 + 14^2} = \sqrt{772} = 2\sqrt{193}$.

Используя полученные значения CB, SK, SC, найдем BP из равенства

$14\sqrt{3} \cdot 25 = 2\sqrt{193} \cdot BP$ ($CB = 14\sqrt{3}$; $SK = 25$).

Тогда $BP = \dfrac{175\sqrt{3}}{\sqrt{193}}$.

2. $$\cos(\angle APB) = \frac{2BP^2 - AB^2}{2 \cdot BP^2} = \frac{2 \cdot \frac{175^2 \cdot 3}{193} - \left(14\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot \frac{175^2 \cdot 3}{193}} =$$

$$= 1 - \frac{2^2 \cdot 7^2 \cdot 3 \cdot 193}{2 \cdot 7^2 \cdot 25^2 \cdot 3} = 1 - \frac{386}{625} = \boxed{\frac{239}{625}};$$

$$\boxed{\angle A\underline{SC}B = \angle APB = \arccos\frac{239}{625}}.$$

д) $AKD \parallel SC$ ($AK \perp CB$); $K \in CB$. Найдем $S_{\triangle AKD}$.

1. Так как $AKD \parallel SC$, то $DK \parallel SC$,

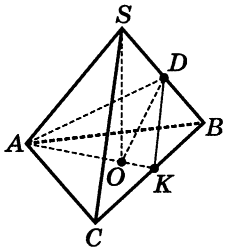
и $DK = \frac{1}{2} SC$; $SD = \frac{1}{2} SB$

($\triangle CSB$ — равнобедренный).

2. Так как $SC = 2\sqrt{193}$,

то $DK = \sqrt{193}$

($AK = H_{CB} = m_{CB}$).



3. Так как $SD = \frac{1}{2}SB$, то $SD = \sqrt{193}$.

4. По формуле вычисления медиан для $\triangle ASB$ найдем AD:

$$AD = \frac{\sqrt{2 \cdot AS^2 + 2 \cdot AB^2 - SB^2}}{2};$$

$$AD = \frac{\sqrt{2 \cdot 772 + 2 \cdot 196 \cdot 3 - 772}}{2} = \sqrt{487}.$$

5. По теореме косинусов для $\triangle AKD$:

$$\cos(\angle AKD) = \frac{AK^2 + DK^2 - AD^2}{2 \cdot AK \cdot DK};$$

$$\cos(\angle AKD) = \frac{21^2 + 193 - 487}{2 \cdot 21 \cdot \sqrt{193}} =$$

$$= \frac{441 + 193 - 487}{2 \cdot 21 \cdot \sqrt{193}} = \frac{7}{2\sqrt{193}};$$

$$\sin(\angle AKD) = \sqrt{1 - \frac{49}{4 \cdot 193}} = \frac{\sqrt{723}}{2\sqrt{193}}.$$

6. $S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} \cdot AK \cdot DK \cdot \sin(\angle AKD);$

$$S_{\triangle AKD} = \frac{1}{2} \cdot 21\sqrt{193} \cdot \frac{\sqrt{723}}{2\sqrt{193}} = \boxed{\frac{21}{4}\sqrt{723}}.$$

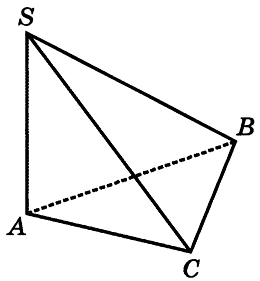
Самостоятельная работа 1 (Пирамиды)

Вариант 1

1. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = BC = AC = 4$
$SA \perp ABC$
$SA = 3$

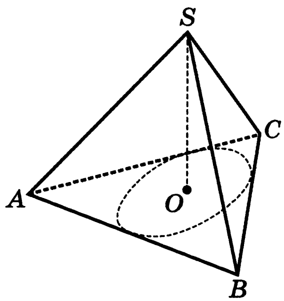
Найдите:
а) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{BC}A)$;
б) $\cos\left(\widehat{SB;SAC}\right)$.



2. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = 12$
$SO \perp ABC$
$AC = 14$
$BC = 16$
O — центр вписанной окружности
$\operatorname{tg}(\angle S\underline{CB}A) = \sqrt{15}$

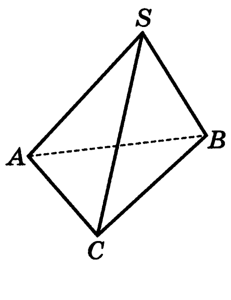
Найдите $S_{\text{б.п.п}}$.



3. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = 4$
$AC = 2$
$\angle BAC = 60^\circ$
$AS = BS = CS = 2\sqrt{3}$

Найдите:
а) $\angle S\underline{AB}C$;
б) $\left(\widehat{SC;ASB}\right)$.

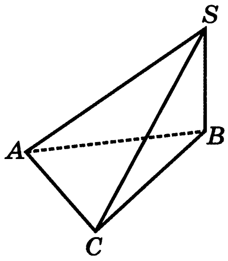


Вариант 2

1. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = BC = AC = 3$
$SB \perp ABC$
$SB = 4$

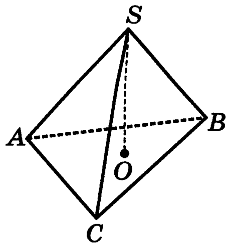
Найдите:
а) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{AC}B)$;
б) $\cos\left(\widehat{AS; SCB}\right)$.



2. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = 10$
$OS = 2\sqrt{2}$
$AC = 12$
$BC = 8$
$\angle S\underline{AC}B = \angle S\underline{CB}A = \angle S\underline{BA}C$

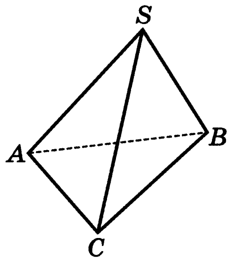
Найдите $S_{\text{б.п.п}}$.



3. Дано:

$SABC$ — пирамида
$AB = 2$
$AC = 1$
$\angle BAC = 60^\circ$
$AS = BS = CS = 0{,}5\sqrt{6}$

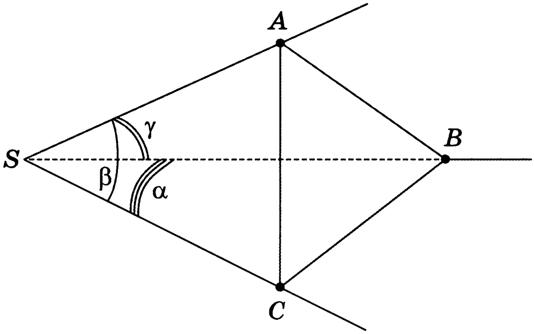
Найдите:
а) $\angle S\underline{AB}C$;
б) $\left(\widehat{SC; ASB}\right)$.



Трехгранный угол

Для решения сложных задач очень полезно знать некоторые теоремы о свойствах трехгранного угла.

Определение. Трехгранным углом называется выпуклая фигура, образованная тремя плоскими углами с общей вершиной и попарно общими сторонами, образующими плоские углы: $\angle ASB$, $\angle ASC$, $\angle BSC$.



Общая вершина плоских углов S называется вершиной трехгранного угла $SABC$.

Двугранные углы между гранями трехгранного угла называются двугранными углами трехгранного угла. Обозначаются плоские углы буквами α, β, γ, а величины двухгранных углов — буквами A, B, C соответственно.

Теорема 1. Любой плоский угол произвольного трехгранного угла больше разности двух других плоских углов трехгранного угла.

Следствие. Любой плоский угол трехгранного угла меньше суммы двух других плоских углов.

Теорема 2. Сумма всех плоских углов трехгранного угла меньше $360°$.

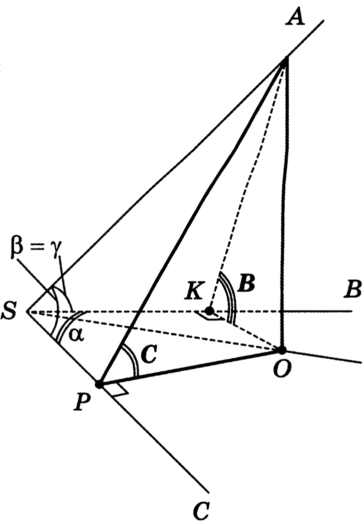
Теорема 3. Если два плоских угла трехгранного угла равны, то общее ребро (или сторона) этих углов ортогонально (перпендикулярно) проецируется на биссектрису третьего плоского угла, и двугранные углы при остальных ребрах равны между собой.

Доказательство

Дано:

$SABC$ — трехгранный угол
$\angle ASB = \gamma$; $\angle ASC = \beta$;
$\angle BSC = \alpha$ — его плоские углы,
причем $\angle ASB = \angle ASC$; $\gamma = \beta$

Докажите, что
$\text{Пр}_{BSC}(AS) = SO$; $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.



а) Построим $AO \perp BSC$.

б) Проведем $\left.\begin{matrix} OP \perp SC \\ OK \perp SB \end{matrix}\right|$,

тогда (по теореме о трех перпендикулярах) $\begin{matrix} AP \perp SC \\ AK \perp SB \end{matrix}$.

в) Рассмотрим $\triangle ASP$ и $\triangle ASK$, которые по доказанному являются прямоугольными: AS — общая; $\angle ASK = \angle ASP$. Значит по признаку равенства прямоугольных треугольников $\triangle ASP = \triangle ASK$, следовательно $SP = SK$ и $AP = AK$.

г) Рассмотрим $\triangle OSK$ и $\triangle OSP$.

SO — общая (по условию); $SP = SK$ (по доказанному);

$\begin{matrix} OK \perp SK \\ OP \perp SP \end{matrix}$ (по построению).

Значит $\triangle OSK = \triangle OSP$. Следовательно,

$\angle OSK = \angle OSP = \dfrac{\alpha}{2}$, т. е. SO — биссектриса.

д) $\triangle AOK = \triangle AOP$ по катету и гипотенузе, значит $\angle AKO = \angle APO$, Следовательно, равны и двугранные углы, т. е. $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

Итак, двугранные углы при ребрах SB и SC равны. (Необходимо помнить, что $AKO \perp SB$, т. е. $\left(\widehat{ASB; CSB}\right) = \angle AKO$, $APO \perp SC$, значит $\left(\widehat{ASC; BSC}\right) = \angle APO$.)

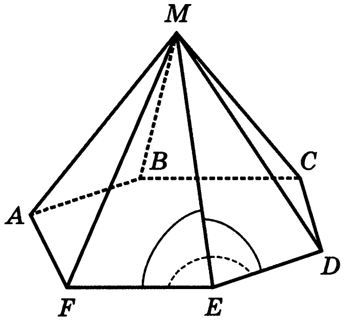
Известна также первая теорема косинусов для трехгранного угла.

Теорема 4. Пусть α, β, γ — плоские углы трехгранного угла $SABC$, а $\boldsymbol{A}$ — величина двугранного угла с ребром SA.

Тогда справедлива формула $\cos \boldsymbol{A} = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma}$.

Очевидно, что это утверждение можно трансформировать и для $\cos \boldsymbol{B}$, $\cos \boldsymbol{C}$.

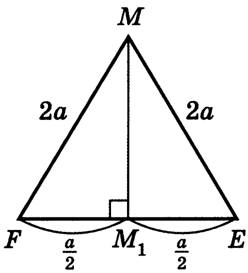
Пример



Рассмотрим правильную шестиугольную пирамиду, у которой боковое ребро в два раза больше ребер основания. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Пусть $\alpha = \angle FED = 120°$,
$\beta = \angle MEF$, $\gamma = \angle MED$ $(\beta = \gamma)$.

Отметим, что здесь E — вершина трехгранного угла $EMFD$.



Очевидно, что $\cos(\angle MEF) = \dfrac{M_1E}{ME}$, т. е.

$\cos(\angle MEF) = \dfrac{1}{4}$; $\sin(MEF) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

$\cos(\angle MED) = \dfrac{1}{4}$; $\sin(MED) = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$;

$\cos(\angle FED) = \cos(120°) = -\dfrac{1}{2}$

(внутренний угол правильного шестиугольника);

$$\cos \boldsymbol{M} = \frac{\cos(\angle FED) - \cos(\angle MEF)\cos(\angle MED)}{\sin(\angle MEF)\cos(\angle MED)}$$

($\boldsymbol{M}$ — двугранный угол при ребре ME);

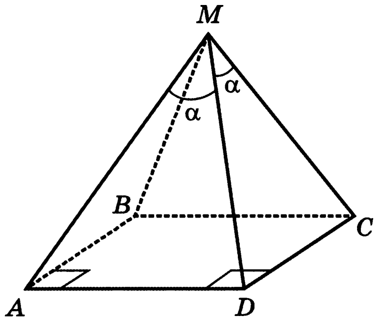
$$\cos \boldsymbol{M} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5}.$$

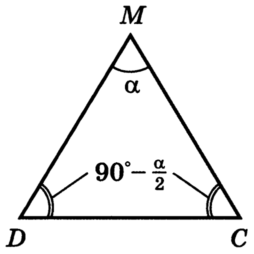
Естественно, если знать данную формулу и уметь ее применять, то значительно упрощается нахождение двугранного угла в трехгранном угле, если даны плоские углы.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ все плоские углы при вершине равны α. Найдите:

а) двугранный угол при боковом ребре;

б) двугранный угол при стороне основания.





Очевидно, что $\angle MDC = 90^\circ - \dfrac{\alpha}{2}$, а $\angle ADC = 90^\circ$.

Обозначим $\angle A\underline{DM}C = \varphi_1$; $\angle M\underline{AD}C = \varphi_2$. По первой теореме косинусов относительно трехгранного угла $DAMC$ получим:

$$\text{а) } \cos\varphi_1 = \frac{\cos 90^\circ - \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{0 - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}, \text{ т. е. } \boxed{\cos\varphi_1 = -\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}.$$

$$\text{б) } \cos\varphi_2 = \frac{\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos 90^\circ\cdot\cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin 90^\circ \sin\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{\alpha}{2} - 0}{1\cdot\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \text{ т. е. } \boxed{\cos\varphi_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Примечание. Для справки отметим, что справедлива вторая теорема косинусов: $\boxed{\cos\alpha = \dfrac{\cos \boldsymbol{A} + \cos \boldsymbol{B}\cdot\cos \boldsymbol{C}}{\sin \boldsymbol{B}\cdot\sin \boldsymbol{C}}}$,

а также теорема синусов для плоских и противоположных двугранных углов трехгранного угла: $\boxed{\dfrac{\sin\alpha}{\sin \boldsymbol{B}} = \dfrac{\sin\beta}{\sin \boldsymbol{B}} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin \boldsymbol{C}}}$.

Задача 2. В четырехугольной пирамиде около трапеции основания можно описать окружность. Высота пирамиды проецируется в центр вписанной в основание окружности. Двугранный угол при боковой стороне основания равен $60°$. Основания трапеции равны $3a$ и a. Найдите:

а) высоту пирамиды;

б) площадь боковой поверхности пирамиды;

в) тангенс угла между наибольшим из боковых ребер пирамиды и плоскостью основания;

г) косинус двугранного угла при наименьшем из боковых ребер пирамиды.

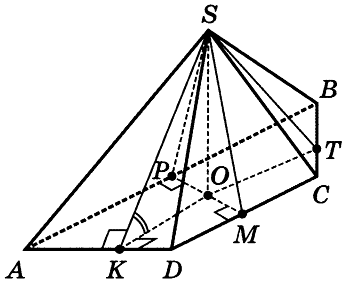
Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — трапеция

Около $ABCD$ можно описать окружность

$SO \perp ABCD$
O — центр вписанной окружности

$\angle S\underline{AD}C = 60°$
$AB = 3a$
$DC = a$



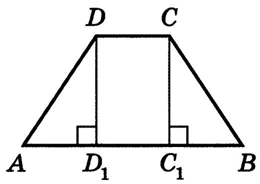
Найдите:

а) H_{ABCD}; б) $S_{\text{б.п}SABCD}$; в) $\operatorname{tg}\left(\widehat{AS; ABCD}\right)$; г) $\cos(\angle A\underline{SD}C)$.

а) 1. Так как O — центр вписанной в трапецию окружности, и $SO \perp ABCD$, то двугранные углы при всех сторонах основания равны между собой, и $AD+BC=AB+DC$.

2. Так как около трапеции можно описать окружность, то $AD=BC$, значит $AD=\dfrac{3a+a}{2}=2a$.

3. Построим $DD_1 \perp AB$, $CC_1 \perp AB$.



Из $\triangle ADD_1 = \triangle BCC_1$ следует, что $AD_1=BC_1=\dfrac{AB-DC}{2}$, т. е. $AD_1=a$.

Тогда $DD_1=\sqrt{AD^2-AD_1^2}$, $DD_1=\sqrt{4a^2-a^2}=a\sqrt{3}$, значит $r_{\text{в}}=\dfrac{1}{2}DD_1=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Из $\triangle SOP$ $SO=OP\cdot \operatorname{tg}60^\circ$,

т. е. $H_{SABCD}=SO=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}=\boxed{1{,}5a}$.

б) 1. Так как все двугранные углы при сторонах основания равны, то $S_{\text{б.п}SABCD}=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos 60^\circ}$.

2. $S_{ABCD}=\dfrac{AB+DC}{2}\cdot H_{ABCD}$,

т. е. $S_{ABCD}=\dfrac{3a+a}{2}\cdot a\sqrt{3}=2a^2\sqrt{3}$.

3. $S_{\text{б.п}SABCD}=\dfrac{S_{\text{осн}}}{\cos 60^\circ}$,

т. е. $S_{\text{б.п}SABCD}=\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{\frac{1}{2}}=\boxed{4a^2\sqrt{3}}$.

в) Можно доказать, что AS — наибольшее боковое ребро.

1. $AO = \sqrt{AP^2 + OP^2}$,

   т. е. $AO = \sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{3}.$

2. Из $\triangle ASO$ $\operatorname{tg}\left(\widehat{AS; ABCD}\right) = \operatorname{tg}(\angle SAO) = \frac{SO}{AO}$,

   т. е. $\operatorname{tg}(\angle SAO) = \frac{1{,}5a}{a\sqrt{3}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

г) 1. Для нахождения $\cos(\angle A\underline{SD}C)$ используем теорему косинусов для трехгранного угла с вершиной D. Для этого необходимо знать все плоские углы, т. е. $\angle ADC$, $\angle ADS$ и $\angle CDS$.

   Напомним теорему для данного трехгранного угла при вершине D:

   $$\cos(\angle A\underline{SD}C) = \frac{\cos(\angle ADC) - \cos(\angle ADS)\cdot\cos(\angle CDS)}{\sin(\angle ADS)\cdot\sin(\angle CDS)}.$$

2. $AC = \sqrt{AC_1^2 + CC_1^2}$; $\quad AC = \sqrt{4a^2 + 3a^2} = a\sqrt{7}.$

   $$\cos(\angle ADC) = \frac{AD^2 + DC^2 - AC^2}{2AD\cdot DC};$$

   $$\cos(\angle ADC) = \frac{4a^2 + a^2 - 7a^2}{2\cdot 2a\cdot a} = -\frac{1}{2},$$

   т. е. $\angle ADC = 120^\circ$; $\quad \sin(\angle ADC) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

3. Так как $SP = SM = \ldots$, то $SM = \frac{r_{\text{в}}}{\cos 60^\circ}$,

   т. е. $SM = a\sqrt{3}$.

   Из $\triangle SDM$: $\operatorname{tg}(\angle MDS) = \frac{SM}{DM}$;

   $$\operatorname{tg}(\angle MDS) = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{3} \quad \left(DM = \frac{1}{2}DC\right).$$

Напомним тригонометрические формулы нахождения косинуса и синуса угла через тангенс этого угла:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

Получим:

$$\cos(\angle CDS) = \frac{1}{\sqrt{1+12}} = \frac{1}{\sqrt{13}} \ (\angle MDS = \angle CDS);$$

$$\sin(\angle CDS) = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{13}}.$$

(В данном случае $\angle ADC$, $\angle ADS$, $\angle CDS$ — острые. Подумайте, почему.)

Можно доказать, что $\angle ADS = \angle CDS$.

4. Теперь подставим соответствующие значения в формулу и получим:

$$\cos(\angle A\underline{SD}C) = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}}{\frac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13}} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{13}}{\frac{4\cdot 3}{13}} = \boxed{-\frac{5}{8}}.$$

Задача 3. В основании пирамиды лежит ромб. Боковое ребро пирамиды перпендикулярно плоскости основания, а два других боковых ребра, находящиеся в смежных боковых гранях, образуют с плоскостями основания угол в $45°$. Наибольшее боковое ребро образует с плоскостью основания угол в $30°$. Найдите:

а) тангенс двугранного угла между боковой гранью, которой не принадлежит боковое ребро, перпендикулярное плоскости основания, и плоскостью основания;

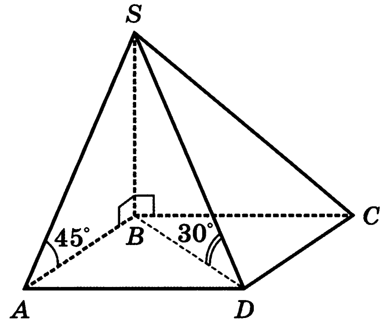
б) тангенс угла между плоскостью, проходящей через вершину пирамиды и меньшую из диагоналей основания, и плоскостью основания;

в) косинус двугранного угла при боковом ребре, образующем с плоскостью основания угол в $45°$;

г) косинус двугранного угла при наибольшем боковом ребре.

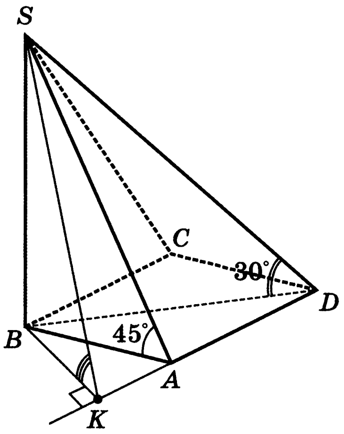
Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — ромб
$SB \perp ABCD$
$\left\{\begin{array}{l}\left(\widehat{SA; ABCD}\right) = 45^\circ \\ \left(\widehat{SD; ABCD}\right) = 30^\circ\end{array}\right.$



Найдите:

а) $\operatorname{tg}(\angle S\underline{AD}C)$;
б) $\operatorname{tg}\left(\widehat{SAC; ABC}\right)$;
в) $\cos(\angle B\underline{AS}D)$;
г) $\cos(\angle A\underline{SD}C)$.



а) 1. Положим $SB = a$.

$AB = SB \cdot \operatorname{tg} 45^\circ$,

т. е. $AB = a$.

$BD = SB \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ$,

т. е. $BD = a\sqrt{3}$.

2. При $BD = a\sqrt{2}$ $AB \perp AD$.

Так как $BD = a\sqrt{3} > a\sqrt{2}$,

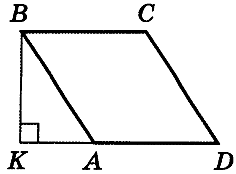
то $\angle BAD > 90^\circ$.

Найдем $\cos(\angle BAD)$.

$$\cos(\angle BAD) = \frac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2AB \cdot AD};$$

$$\cos(\angle BAD) = \frac{2a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}.$$

Значит $\angle BAD = 120^\circ$, следовательно, чертеж другой.



3. Построим $BK \perp AD$, тогда по теореме о трех перпендикулярах $SK \perp AD$, значит $\angle S\underline{AD}C = \angle SKB$.

Из $\triangle ABK$ $\quad \angle BAK = 180^\circ - \angle BAD$;

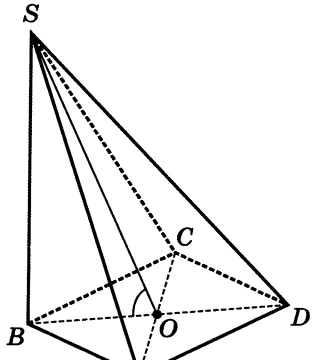
$\angle BAK = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$; $\quad BK = AB \sin 60^\circ$;

$BK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

$\operatorname{tg}(\angle S\underline{AD}C) = \operatorname{tg}(\angle SKB) = \dfrac{SB}{BK}$;

$\operatorname{tg}(\angle S\underline{AD}C) = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}\sqrt{3}}$.

б) Так как $ABCD$ — ромб, то $AC \perp BD$ ($BO \perp AC$), значит $SO \perp AC$, тогда $SOB \perp AC$.



1. $BO = AB \sin 60^\circ$,

   т. е. $BO = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

2. Учитывая, что $\angle BAD = 120^\circ$, AC — меньшая из диагоналей ромба.

   $\left(S\widehat{AC; A}BC\right) = \angle SOB$.

3. $\operatorname{tg}\left(S\widehat{AC; A}BC\right) = \operatorname{tg}(\angle SOB) = \dfrac{SB}{BO}$;

   $\operatorname{tg}\left(S\widehat{AC; A}BC\right) = \dfrac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \boxed{\dfrac{2}{3}\sqrt{3}}$.

в) 1. Для нахождения двугранного угла при боковом ребре SA используем теорему косинусов для трехгранного угла при вершине A.

Два плоских угла — $\angle SAB$ и $\angle BAD$ — известны. Найдем $\angle SAD$.

2. $\operatorname{tg}(\angle SAK) = \dfrac{SK}{AK}$, где $SK = \sqrt{SB^2 + BK^2}$;

$$SK = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot 3}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{7},$$

значит $\operatorname{tg}(\angle SAK) = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{7}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{7}$.

Тогда так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ ($\alpha \in$ I четверти), то

$$\cos(\angle SAK) = \frac{1}{\sqrt{1+7}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Следовательно, $\cos(\angle SAD) = \cos(180^\circ - \angle SAK) =$

$$= -\cos(\angle SAK) = -\frac{\sqrt{2}}{4};$$

$$\sin(\angle SAD) = \sqrt{1 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

3. $$\cos(\angle B\underline{AS}D) = \frac{\cos(\angle BAD) - \cos 45^\circ \cdot \cos(\angle SAD)}{\sin 45^\circ \cdot \sin(\angle SAD)};$$

$$\cos(\angle B\underline{AS}D) = \frac{-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{14}}{4}} = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \boxed{-\frac{\sqrt{7}}{7}}.$$

г) 1. Аналогично, для нахождения двугранного угла при ребре SD используем теорему косинусов для трехгранного угла при вершине D:

$$\cos(\angle A\underline{SD}C) = \frac{\cos(\angle ADC) - \cos(\angle SDA)\cdot\cos(\angle SDC)}{\sin(\angle SDA)\cdot\sin(\angle SDC)}.$$

2. $\angle ADC = 60^\circ$.

3. $\operatorname{tg}(\angle SDA) = \dfrac{SK}{DK}$, где $SK = \dfrac{a}{2}\sqrt{7}$,

$DK = DA + AK$, т. е. $DK = a + \dfrac{a}{2} = \dfrac{3}{2}a$,

значит $\operatorname{tg}(\angle SDA) = \dfrac{\frac{a}{2}\sqrt{7}}{\frac{3}{2}a} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$.

Так как $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$ $(0 < \alpha < 90^\circ)$, то

$$\cos(\angle SDA) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{7}{4}}};\quad \sin(\angle SDA) = \sqrt{1-\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

4. Можно доказать, что $\angle SDA = \angle SDC$,

тогда $\cos(\angle A\underline{SD}C) = \dfrac{\frac{1}{2}-\frac{9}{16}}{\frac{7}{16}} = -\dfrac{1}{7}$.

Практикум 5 (Решение более сложных задач)

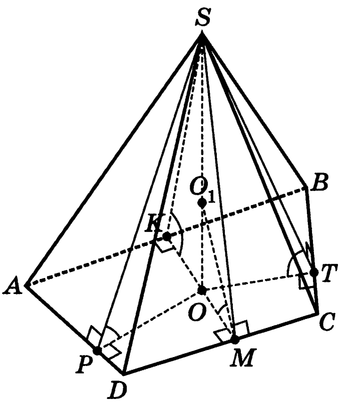
Задача 1. Дана пирамида, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями, равными 25 и 9. Апофемы боковых граней равны 15. Найдите:

а) площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду;

б) площадь сечения, проходящего через центр вписанной сферы и одну из параллельных сторон основания трапеции.

Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — трапеция
$AD = BC$
$AB = 25$
$DC = 9$
Апофемы боковых граней равны 15
В пирамиду вписана сфера



Найдите:

а) $S_{\text{сф}}$;

б) $S_{\text{сечения}}$, где сечение проходит через центр сферы и через сторону DC или сторону AB.

а) Вычислим площадь поверхности сферы, вписанной в пирамиду.

1. Построим $SO \perp ABCD$, $SP \perp AD$, $ST \perp BC$, $SM \perp DC$. Так как $SP = SK = ST = SM = 15$, то O — центр вписанной окружности, тогда

   $$\triangle SPO = \triangle STO = \triangle SMO = \triangle SKO.$$

   По теореме о трех перпендикулярах

   $$OP \perp AD,\ \ OK \perp AB,\ \ OT \perp BC,$$

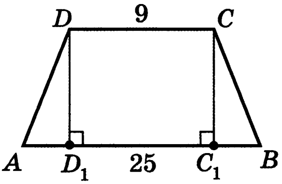
   значит $\angle SPO = \angle STO = \angle SMO = \angle SKO = \angle S\underline{AD}C =$
   $= \angle S\underline{BC}D = \angle S\underline{CD}A = \angle S\underline{AB}C.$

Известно, что для того чтобы в пирамиду можно было вписать сферу, достаточно, чтобы двугранные углы при основании были равны. Значит в данную пирамиду можно вписать сферу.

Рассмотрим $\triangle KSM$. $SK = SM$, $\angle SKO = \angle SMO$.

Далее, очевидно, что радиус вписанной в $\triangle KSM$ окружности равен радиусу вписанной в пирамиду сферы ($\triangle SKO = \triangle SPO = \triangle SMO = \triangle STO$, где SP, SK, SM, ST — касательные к сфере), т. е. $r_{\text{в}} = R_{\text{сф}}$.

2. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Так как в $ABCD$ можно вписать окружность, то $AB + CD = 2AD$. Значит



$AD = 17$; $AD_1 = \dfrac{AB - DC}{2}$; $AD_1 = \dfrac{25-9}{2} = 8$;

$DD_1 = \sqrt{AD^2 - AD_1^2}$; $DD_1 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$;

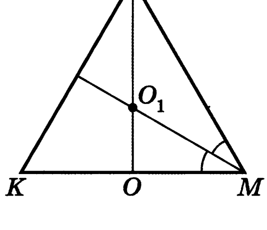
$DD_1 = KM$, значит $\triangle KSM$ — равносторонний.

Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник, находится на пересечении биссектрис.

Так как $r_{\text{в}} = OO_1 = OM \cdot \operatorname{tg} 30°$ (O_1M — биссектриса),

то $r_{\text{в}} = \dfrac{15}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 2{,}5\sqrt{3}$;

$r_{\text{в}} = R_{\text{сф}} = 2{,}5\sqrt{3}$.



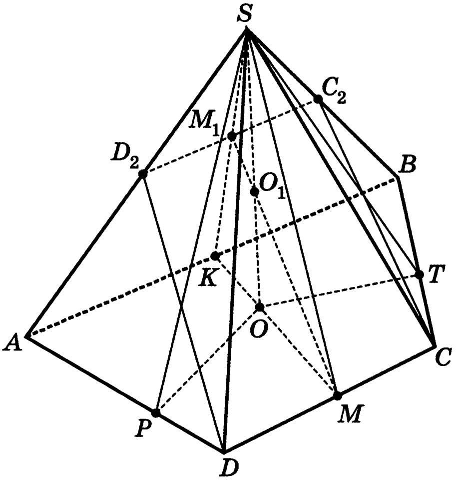
3. $S_{\text{сф}} = 4\pi R_{\text{сф}}^2$;

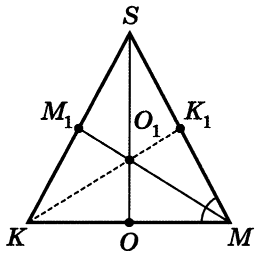
$S_{\text{сф}} = 4 \cdot \dfrac{25}{4} \cdot 3\pi = 75\pi$ (кв. ед.).

б) Вычислим площадь сечения пирамиды, проходящего через центр вписанной сферы и одну из параллельных сторон трапеции основания.

Вариант 1

Пусть сечение проходит через сторону DC и точку O_1 — центр сферы.





Рассмотрим $\triangle KSM$, где

m_{KS} — медиана к стороне KS;

l_{KS} — биссектриса к стороне KS;

H_{KS} — перпендикуляр к стороне KS.

1. Так как $\triangle KSM$ равносторонний, то

$$m_{KS} = l_{KS} = H_{KS} = M_1M = KM\sin 60^\circ =$$

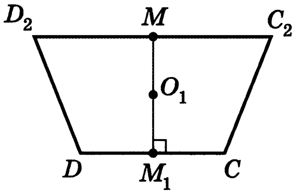
$$= KM\frac{\sqrt{3}}{2}\ (KM_1 = M_1S);\ M_1M = \frac{15\sqrt{3}}{2} = KK_1.$$

2. Рассмотрим $\triangle ASB$.

Так как $D_2C_2 \parallel AB$ и $M_1 \in D_2C_2$,

то $D_2C_2 = \frac{1}{2}AB, \quad D_2C_2 = \frac{25}{2} = 12{,}5.$

3. Рассмотрим трапецию DD_2C_2C.



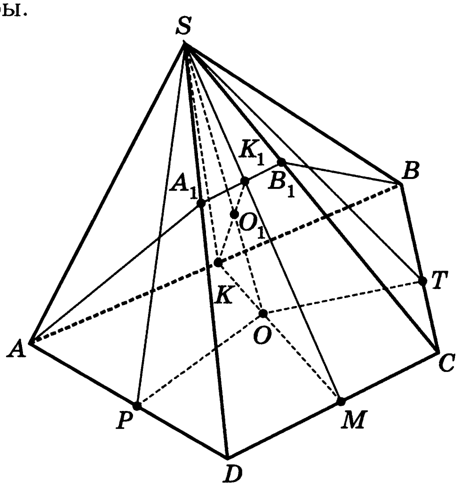
$$S_{DD_2C_2C} = \frac{DC + D_2C_2}{2} MM_1;$$

$$S_{DD_2C_2C} = \frac{9 + 12{,}5}{2} \cdot \frac{15}{2}\sqrt{3} =$$

$$= \frac{(25 + 18)15\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{43 \cdot 15}{8}\sqrt{3} = \frac{645}{8}\sqrt{3} = \boxed{80{,}625\sqrt{3}}.$$

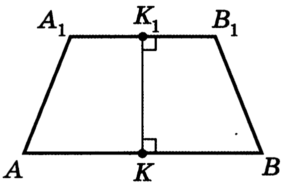
Вариант 2

Пусть сечение проходит через сторону AB и точку O_1 — центр сферы.



Так как $SK_1 = MK_1$, $A_1B_1 \parallel AB$, $K_1 \in A_1B_1$,

то $A_1B_1 = \frac{1}{2}DC$; $A_1B_1 = \frac{9}{2}$;



Рассмотрим трапецию AA_1B_1B.

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot KK_1$$

($KK_1 \perp A_1B_1$).

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{25 + \frac{9}{2}}{2} \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} = \frac{59 \cdot 15\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \frac{885}{8}\sqrt{3} = \boxed{110{,}625\sqrt{3}}.$$

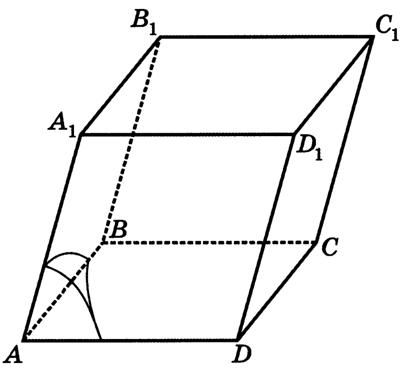
Задача 2. Рассмотрим параллелепипед, все грани которого — равные ромбы с диагоналями, равными 8 и 6. Найдите:

а) площадь наименьшего по площади диагонального сечения;
б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
в) двугранный угол при ребре основания;
г) двугранный угол при боковом ребре;
д) объем параллелепипеда;
е) расстояние между только наибольшими и между только наименьшими скрещивающимися диагоналями смежных граней.

Первый случай

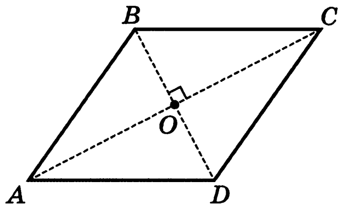
Рассмотрим параллелепипед, все грани которого — равные ромбы с диагоналями, равными 8 и 6. Причем это параллелепипед, в котором существует вершина, в которой сходятся только **острые** углы ромбов граней.

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, все грани — равные ромбы.
A — общая вершина острых углов ромбов смежных граней
$AC = 8$
$BD = 6$



Найдите:

а) площадь наименьшего по площади диагонального сечения;
б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;
в) двугранный угол при ребре основания;
г) двугранный угол при боковом ребре;
д) объем параллелепипеда;
е) расстояние между только наибольшими и между только наименьшими скрещивающимися диагоналями смежных граней.



а) Найдем площадь наименьшего диагонального сечения.

В ромбе $AC \perp BD$:

$AO = OC, \quad BO = OD.$

Тогда $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Из $\triangle ABD$ $\cos(\angle A) = \dfrac{AB^2 + AD^2 - BD^2}{2 \cdot AB \cdot AD}$;

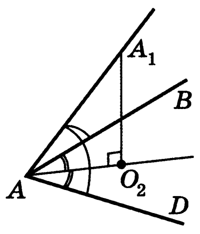
$$\cos(\angle A) = \frac{5^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{14}{2 \cdot 25} = \frac{7}{25}.$$

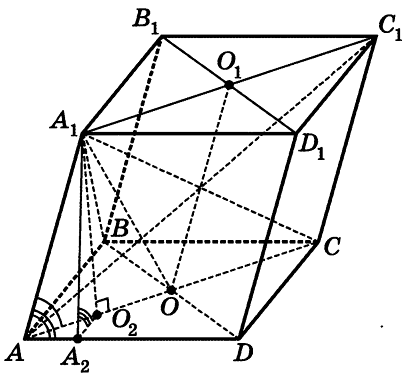
Из $\triangle AOD$ $\cos(\angle OAD) = \dfrac{AO}{AD} = \dfrac{4}{5}$

(где $AO = 4$, а $AD = 5$).

Так как BD — меньшая диагональ основания, то *возможно* BB_1D_1D — наименьшее по площади диагональное сечение. Найдем $S_{BB_1D_1D}$.

Для этого напомним, что если два плоских угла трехгранного угла равны, то общая сторона этих углов ортогонально проектируется на биссектрису третьего плоского угла.





Учтем, что $\angle A_1AB = \angle A_1AD$ (ромбы равны). Тогда построим $A_1O_2 \perp ABCD$. Значит $O_2 \in AC$, т. е. биссектрисе угла BAD.

Далее:

$BD \perp AC$ (по условию),
$BD \perp A_1O_2$ (так как $A_1O_2 \perp ABCD$).

Значит $BD \perp AA_1C_1C$, а тогда $BD \perp OO_1$ (любой прямой AA_1C_1C), т.е. $BD \perp BB_1$ ($BB_1 \parallel OO_1$).

Таким образом, BB_1D_1D — прямоугольник;

$S_{BB_1D_1D} = BD \cdot BB_1$; $\quad S_{BB_1D_1D} = 6 \cdot 5 = 30$ (кв. ед.).

Вопрос о поиске наименьшего по площади диагонального сечения окончательно не решен. Для этого в процессе решения пункта б) рассмотрим еще одно диагональное сечение.

б) Найдем $\left(\widehat{AA_1; ABCD}\right)$.

$A_1B = A_1D$, $\triangle A_1BD$ — равнобедренный.

A_1O — медиана и высота.

$A_1O = \sqrt{A_1B^2 - BO^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

Из $\triangle AA_1O$ $\cos(\angle A_1AO) = \dfrac{AA_1^2 + AO^2 - A_1O^2}{2A_1A \cdot AO}$;

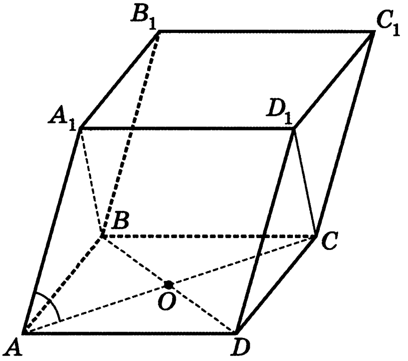
$$\cos(\angle A_1AO) = \frac{5^2 + 4^2 - \left(3\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{7}{20}.$$

Так как $O_2 \in AO$, то $\angle A_1AO = \left(\widehat{AA_1; ABCD}\right)$,

значит $\cos\left(\widehat{AA_1; ABCD}\right) = \dfrac{7}{20}$,

или $\left(\widehat{AA_1; ABCD}\right) = \angle A_1AO = \arccos\dfrac{7}{20}$.

Рассмотрим диагональное сечение A_1BCD_1.



$A_1B = 6,\ \ BC = 5.$

Тогда $S_{A_1BCD_1} = A_1B \cdot BC \cdot \sin(\angle A_1BC)$.

По теореме косинусов

$$A_1C = \sqrt{AA_1^2 + AC^2 - 2AA_1 \cdot AC \cdot \cos(\angle A_1AC)};$$

$$A_1C = \sqrt{5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{7}{20}} = \sqrt{25 + 64 - 28} = \sqrt{61}.$$

Тогда из $\triangle A_1BC$ $\cos(\angle A_1BC) = \dfrac{6^2 + 5^2 - 61}{2 \cdot 6 \cdot 5} = 0$, значит $A_1B \perp BC$. Из этого следует, что

$$S_{A_1BCD_1} = A_1B \cdot BC; \quad S_{A_1BCD_1} = 6 \cdot 5 = 30.$$

Значит $S_{A_1BCD_1} = S_{BB_1D_1D}$ — наименьшее по площади, диагональное сечение.

Площадь его равна $\boxed{30}$.

Примечание. Окончательно вопрос может быть решен, только если рассмотреть площадь диагонального сечения A_1B_1CD и установить, что $S_{A_1B_1CD} = 30$. Важно при этом доказать, что $S_{AB_1C_1D} > 30$. Действительно, $S_{AB_1C_1D} = 2\sqrt{351} > 30$.

в) Рассмотрим $\angle A_1\underline{AD}C$ — двугранный угол при ребре AD. Построим $A_1A_2 \perp AD$, A_2O_2.

Так как $\angle BAD = \angle A_1AD$ (A — вершина острых углов трех равных ромбов),

то $\cos(\angle BAD) = \cos(\angle A_1AD) = \dfrac{7}{25}$ (см. пункт а).

Значит $AA_2 = AA_1 \cdot \cos(\angle A_1AD)$; $AA_2 = 5 \cdot \dfrac{7}{25} = \dfrac{7}{5}$;

$AO_2 = AA_1 \cos(\angle A_1AO)$; $AO_2 = 5 \cdot \dfrac{7}{20} = \dfrac{7}{4}$.

Тогда можно использовать теорему о трех перпендикулярах: так как $A_1O_2 \perp ABCD$ и $A_1A_2 \perp AD$,

то $O_2A_2 \perp AD$ ($AD \perp A_1A_2O_2$).

Тогда $O_2A_2 = \sqrt{AO_2^2 - AA_2^2}$;

$$O_2A_2 = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{7 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}.$$

С другой стороны, $A_1A_2 = \sqrt{AA_1^2 - AA_2^2}$;

$$A_1A_2 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}.$$

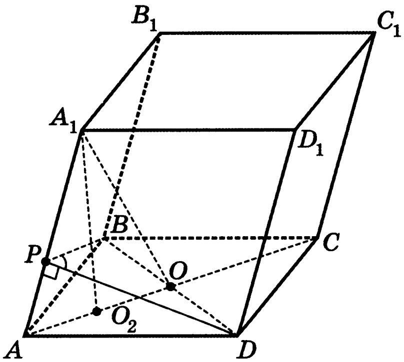
Из $\triangle A_1A_2O_2$ следует, что $\cos(\angle A_1A_2O_2) = \dfrac{A_2O_2}{A_1A_2}$;

$\cos(\angle A_1A_2O_2) = \dfrac{\frac{21}{20}}{\frac{24}{5}} = \dfrac{21}{96}$, и так как

$\widehat{(AA_1D_1D);(ABCD)} = \angle A_1\underline{AD}C = \angle A_1A_2O_2$,

то $\cos(\angle A_1ADC) = \dfrac{21}{96}$, т. е. $\angle A_1\underline{AD}C = \arccos\dfrac{21}{96}$.

г) Найдем двугранный угол при ребре AA_1.



Пусть $DP \perp AA_1$.

Так как $\triangle AA_1D = \triangle AA_1B$, то $BP \perp AA_1$.

Значит $AA_1 \perp PBD$, тогда

$$\left(AA_1B_1\widehat{B; A}A_1D_1D\right) = \angle B_1\underline{A_1A}D_1 = \angle BPD;$$

$$AP = AD \cdot \cos(A_1AD); \quad AP = 5 \cdot \frac{7}{25} = \frac{7}{5};$$

$$DP = \sqrt{AD^2 - AP^2};$$

$$DP = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}, \text{ но } DP = BP.$$

Учитывая это, найдем из $\triangle PBD$

$$\cos(\angle BPD) = \frac{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 6^2}{2 \cdot \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \frac{2 \cdot 576 - 36 \cdot 25}{2 \cdot 576} =$$

$$= \frac{1152 - 900}{1152} = \frac{252}{1152} = \frac{126}{576} = \frac{63}{288} = \frac{7}{32}.$$

Значит $\angle B\underline{AA_1}D_1 = \arccos\frac{7}{32}$.

д) Рассмотрим $\triangle A_1AO_2$.

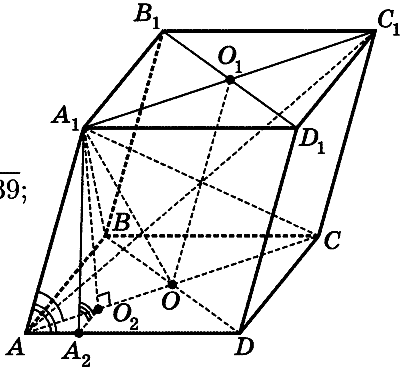
Из чертежа видно, что

$A_1O_2 = \sqrt{AA_1^2 - AO_2^2}$;

$A_1O_2 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{39}$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$;

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24.$



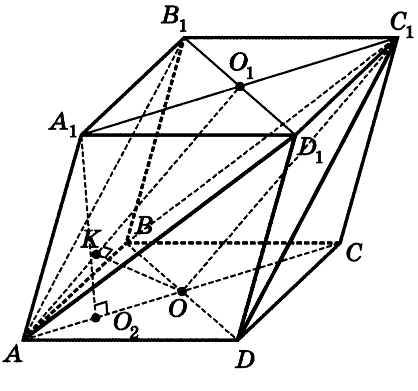
$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$;

$V = 24 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{39}$; $V = 18\sqrt{39}$ (куб. ед.).

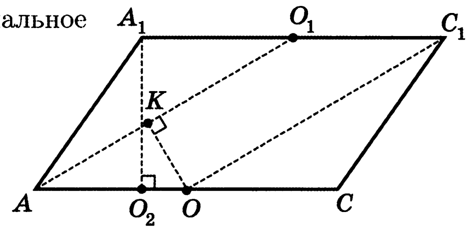
е) Найдем расстояние между только наибольшими и между только наименьшими скрещивающимися диагоналями смежных граней.

1. Рассмотрим в начале вычисление расстояния между только *наибольшими* скрещивающимися диагоналями смежных граней: $\rho(AD_1; DC_1)$.

Так как расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между однозначно определяемыми этими прямыми параллельными плоскостями, то построим эти плоскости и найдем взаимный перпендикуляр.



Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C, где $AA_1 = C_1C$.



$AA_1 = A_1B_1 = A_1D_1 = 5;$

$$AO_1 = \sqrt{AA_1^2 + A_1O_1^2 - 2AA_1 \cdot A_1O_1 \cos(\angle AA_1O_1)} =$$

$$= \sqrt{AA_1^2 + A_1O_1^2 - 2AA_1 \cdot A_1O_1 \cos(180^\circ - \angle A_1AO)}$$

$$\left(\cos(\angle A_1AO) = \frac{7}{20}\right).$$

$$AO_1 = \sqrt{5^2 + 4^2 + 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{7}{20}} =$$

$= \sqrt{25 + 16 + 14} = \sqrt{55}$. (Можно проще из $\triangle AB_1O_1$.)

Так как $A_1O_2 \perp ABCD$ (по построению),

то $A_1O_2 \perp BD$, $BD \perp AC$ ($ABCD$ — ромб),

значит $BD \perp AA_1C_1C$.

Значит, любая прямая, принадлежащая AA_1C_1C, перпендикулярна BD.

Построим $OK \perp AO_1$, тогда $OK \perp BD$ ($BD \parallel B_1D_1$, $AB_1 \parallel DC_1$), следовательно $OK \perp C_1BD$.

Так как $AO_1 \parallel OC_1$, то

$$\rho(AD_1; DC_1) = \rho(AB_1D_1; C_1BD) = OK.$$

Применяя метод площадей, получим

$$\left.\begin{aligned} S_{AO_1C_1O} &= AO \cdot A_1O_2 \\ S_{AO_1C_1O} &= AO_1 \cdot OK \end{aligned}\right| . \text{ Значит } OK = \frac{AO \cdot A_1O_2}{AO_1}.$$

Напомним, что

$AO = 4; \quad A_1O_2 = \frac{3}{4}\sqrt{39}; \quad AO_1 = \sqrt{55};$

$OK = \dfrac{4 \cdot \frac{3}{4}\sqrt{39}}{\sqrt{55}} = \dfrac{3}{55}\sqrt{55 \cdot 39} = \dfrac{3}{55}\sqrt{2145}$. Тогда

$\rho(AD_1; DC_1) = \rho(AB_1D_1; C_1BD) = OK = \boxed{\dfrac{3\sqrt{2145}}{55}}$.

Примечание. Учитывая, что расстояние между плоскостями $\rho(AB_1D_1; C_1BD) = OK$, получим, что

$\rho(AD_1; DC_1) = \rho(AB_1; BC_1) = \rho(AC; BC_1)$.

Аналогично $\rho(B_1D_1; DC_1) = \rho(BD; AD_1) = OK$.

2. Рассмотрим случай $\rho(AD_1; A_1C_1)$.

$\left.\begin{array}{l} AD_1 \parallel BC_1 \\ AC \parallel A_1C_1 \end{array}\right|,$

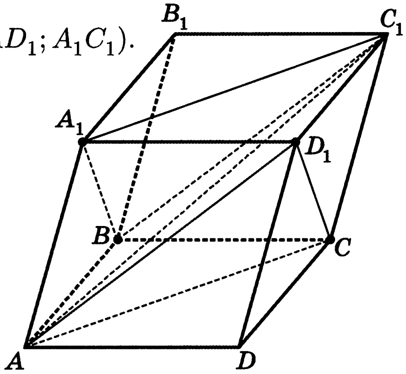
тогда $BA_1C_1 \parallel D_1AC$.

Очевидно, что

$\rho(BA_1C_1; D_1AC) =$

$= \rho(AD_1; A_1C_1) =$

$= \rho(A; BA_1C_1)$.



Решать задачу обычными способами технически сложно. В данном случае покажем применение метода равенства объемов. (Позже, в главе 2 будет рассмотрен векторный способ решения.)

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Примечание. Идея решения задачи связана с тем, что $A_1BC_1 \parallel AD_1C$.

Кроме того, так как $A_1C_1 \subset A_1BC_1$; $AD_1 \subset AD_1C_1$, то $AD_1 \parallel A_1BC_1$.

Значит $\rho(AD_1; A_1BC_1) = \rho(AD_1; A_1C_1) = \rho(A; A_1BC_1) = H_{ABA_1C_1}$, где ABA_1C_1 — пирамида с основанием BA_1C_1.

$S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$ ($ABCD$ — ромб, т. е. $AC\perp BD$);

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD\cdot H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$,

т. е. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=\dfrac{1}{2}\cdot 6\cdot 8\cdot\dfrac{3\sqrt{39}}{4}=\underline{18}\sqrt{39}$,

тогда $V_{ABCA_1B_1C_1}=\dfrac{1}{2}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=9\sqrt{39}$.

$V_{C_1AA_1B_1B}=\dfrac{1}{3}V_{A\ldots D_1}$ — докажите самостоятельно.

$V_{C_1AA_1B_1B}=6\sqrt{39}$, где $C_1AA_1B_1B$ — пирамида с основанием AA_1B_1B.

$V_{C_1AA_1B}=\dfrac{1}{2}V_{C_1AA_1B_1B}$, т. е. $V_{C_1AA_1B}=3\sqrt{39}$, где C_1AA_1B — пирамида с основанием $\triangle AA_1B$.

С другой стороны, $V_{C_1AA_1B}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BA_1C_1}H_{ABA_1C_1}$,

где $H_{ABA_1C_1}=\rho(A;BA_1C_1)$.

Учтем, что

$S_{\triangle BA_1C_1}=\sqrt{11(11-8)(11-8)(11-6)}=3\sqrt{55}$,

где $\dfrac{8+8+6}{2}=11=p$ (p — полупериметр, $A_1C_1=8$; $BC_1=8$; $A_1B=6$).

Тогда $3\sqrt{39}=\dfrac{1}{3}\cdot 3\sqrt{55}\cdot H_{ABA_1C_1}$,

т. е. $H_{ABA_1C_1}=3\sqrt{\dfrac{39}{55}}=\dfrac{3}{55}\sqrt{2145}$;

$\rho(AD_1;A_1C_1)=\boxed{\dfrac{3}{55}\sqrt{2145}}$.

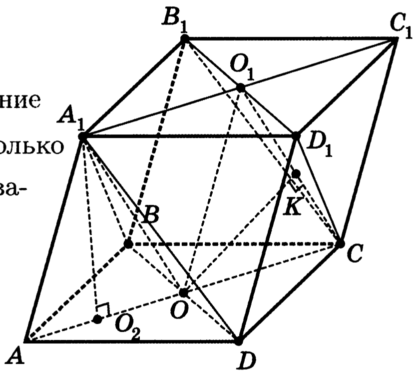
Примечание

Из $\rho(BA_1C_1; D_1AC_1) = \dfrac{3}{55}\sqrt{2145}$ следует, что

$\rho(AD_1; A_1C_1) = \rho(AC; BC_1) = \rho(AD_1; A_1B) =$

$= \rho(A_1C_1; D_1C) = \rho(D_1C; BC_1) = \rho(AC; A_1B) =$

$= \dfrac{3}{55}\sqrt{2145}.$



3. Теперь найдем расстояние $\rho(A_1D; D_1C)$ между только *наименьшими* скрещивающимися диагоналями смежных граней. Рассмотрим $\triangle A_1BD$ и $\triangle CD_1B_1$.

$\left.\begin{array}{l} A_1D \parallel B_1C \\ BD \parallel B_1D_1 \end{array}\right|$, значит $A_1BD \parallel CD_1B_1$.

BB_1D_1D — прямоугольник (было доказано ранее),

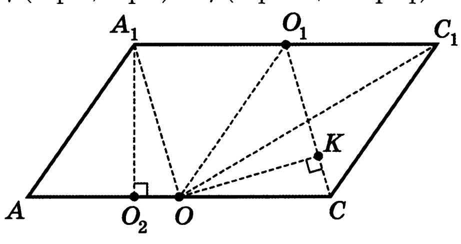
тогда $\left.\begin{array}{l} BD \perp OO_1 \\ AC \perp BD \text{ (ромб)} \end{array}\right|$, значит $BD \perp AA_1C_1C$.

Построим $OK \perp O_1C$. Тогда

$\left.\begin{array}{l} OK \in AA_1C_1C \\ B_1D_1 \perp OK \end{array}\right|$ $(B_1D_1 \parallel BD,\ BD \perp AA_1C_1C)$.

$OK \perp CD_1B_1$, значит

$\rho(A_1D; D_1C) = \rho(A_1BD; CD_1B_1) = OK.$



Так как $\cos(\angle A_1AO) = \cos(\angle O_1OC) = \dfrac{7}{20}$, то

$$O_1C = \sqrt{OO_1^2 + OC^2 - 2 \cdot OO_1 \cdot OC \cos(\angle O_1OC)},$$

$$O_1C = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{7}{20}} = 3\sqrt{3}.$$

Применяя метод площадей, получим

$$\left.\begin{aligned} S_{\triangle OO_1C} &= \frac{1}{2} \cdot OO_1 \cdot OC \cdot \sin(\angle O_1OC) \\ S_{\triangle OO_1C} &= \frac{1}{2} O_1C \cdot OK \end{aligned}\right|,$$

тогда $\sin(\angle O_1OC) = \dfrac{3}{20}\sqrt{39}$;

$$OK = \frac{OO_1 \cdot OC \sin(\angle O_1OC)}{O_1C},$$

т. е. $OK = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot \frac{3}{20}\sqrt{39}}{3\sqrt{3}} = \sqrt{13}$.

Итак, $\rho(A_1D; D_1C) = \rho(A_1BD; CD_1B_1) = \boxed{\sqrt{13}}$.

Примечания

1. $\rho(A_1B; B_1D_1) = \rho(BD; B_1C) = \rho(B_1C; A_1B) =$
   $= \rho(B_1D_1; A_1D) = \rho(BD; D_1C) = \boxed{\sqrt{13}}$.
2. $\triangle A_1BD = \triangle CD_1B_1$ — правильные.

Второй случай (в начале решения необходимо проверить возможность его существования).

Дан параллелепипед, все грани которого — также равные ромбы с диагоналями, равными 8 и 6. Но рассмотрим теперь параллелепипед *с другим набором граней-ромбов*. Причем в таком параллелепипеде существует вершина, в которой сходятся только тупые углы граней.

Убедимся, что такой случай возможен.

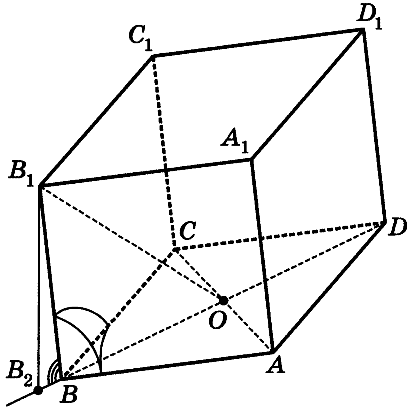
$$\cos(\angle CBA) = \frac{5^2+5^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 5} = -\frac{14}{50} = -\frac{7}{25}.$$

Так как $\cos(\angle CBA) = -\frac{7}{25} > -\frac{1}{2}$, то $\angle CBA < 120°$, а значит, возможно существование параллелепипеда, у которого есть вершина, в которой действительно сходятся грани с вершинами тупых углов ромбов (пусть это будет вершина B).

Примечание

Если бы выполнялось неравенство $\angle CBA \geqslant 120°$, то такого параллелепипеда в природе не существовало бы. Действительно, тогда $\angle CBA + \angle CBA_1 + \angle ABB_1 \geqslant 360°$, что невозможно, так как уже при $\angle CBA + \angle CBA_1 + \angle ABB_1 = 360°$ параллелепипед вырождается в плоскость.

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, все грани — равные ромбы.
B — общая вершина тупых углов ромбов смежных граней
$AC = 8$
$BD = 6$



Найдите:

а) площадь наименьшего по площади диагонального сечения;

б) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

в) двугранный угол при ребре основания;

г) двугранный угол при боковом ребре;

д) объем призмы;

е) расстояние между только наименьшими и между только наибольшими скрещивающимися диагоналями смежных граней.

Так как $\angle ABC$, $\angle ABB_1$ и $\angle CBB_1$ — тупые, то из условий задачи следует, что $AB_1 = B_1C = AC = 8$.

Положим $B_1B_2 \perp ABCD$ ($B_2 \in BD$), тогда так как $BD \perp AC$, то $B_1O \perp AC$ (по теореме о трех перпендикулярах).

Кстати и $B_1B \perp AC$.

$B_1O = \sqrt{AB_1^2 - AO^2}$; $\quad AO = \dfrac{1}{2}AC$; $\quad AO = 4$;

$B_1O = \sqrt{8^2 - 4^2} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$.

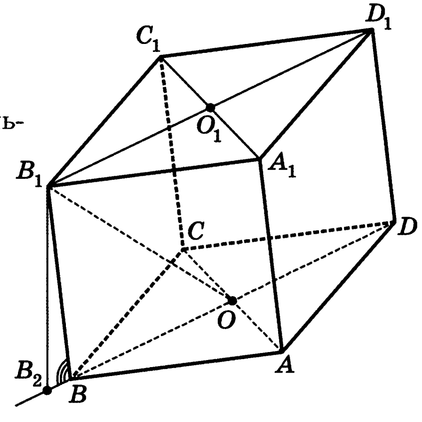
По теореме косинусов

$$\cos(\angle B_1BO) = \frac{BB_1^2 + BO^2 - B_1O^2}{2BB_1 \cdot BO};$$

$$\cos(\angle B_1BO) = \frac{5^2 + 3^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{-14}{30} = -\frac{7}{15};$$

$$\angle B_1BO = \arccos\left(-\frac{7}{15}\right) = 180^\circ - \arccos\frac{7}{15}.$$

Значит $\angle B_1BO > 90^\circ$.



а) Найдите площадь диагонального сечения, наименьшего по площади.

Рассматривая AA_1C_1C, можно доказать (см. первый вариант задачи), что $AA_1 \perp AC$ и $AC_1 = A_1C$.

Тогда $S_{AA_1C_1C} = AA_1 \cdot AC$, $\quad S_{AA_1C_1C} = 5 \cdot 8 = 40$,

но $S_{BB_1D_1D} = BB_1 \cdot BD \cdot \sin(\angle B_1BD)$.

Известно, что $\angle B_1BB_2 = 180^\circ - \angle B_1BD$.

Зная, что $\cos\angle B_1BO = -\dfrac{7}{15}$, найдем $\sin(\angle B_1BD)$:

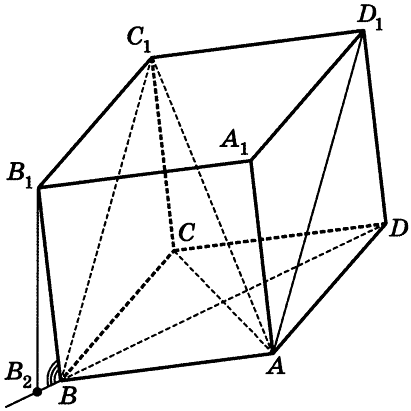
$$\sin(\angle B_1BD) = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{15}\right)^2} = \frac{\sqrt{225-49}}{15} = \frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

Значит

$$B_1B_2 = BB_1\sin(B_1BB_2) = BB_1\sin(180^\circ - \angle B_1BD) =$$
$$= BB_1 \cdot \sin(\angle B_1BD),\ \text{т. е. } B_1B_2 = 5\cdot\frac{4\sqrt{11}}{15} = \frac{4}{3}\sqrt{11}.$$

Тогда $S_{BB_1D_1D} = 5\cdot 6\cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{15} = 8\sqrt{11} < 40.$

Рассмотрим диагональное сечение BC_1D_1A.



$$S_{BC_1D_1A} = AB\cdot BC_1\cdot\sin(\angle ABC_1).$$

Так как $AC_1 = \sqrt{AC^2+CC_1^2}$; $AC_1 = \sqrt{8^2+5^2} = \sqrt{89}$,

то $\cos(\angle ABC_1) = \dfrac{AB^2+BC_1^2-AC_1^2}{2\cdot AB\cdot BC_1}$;

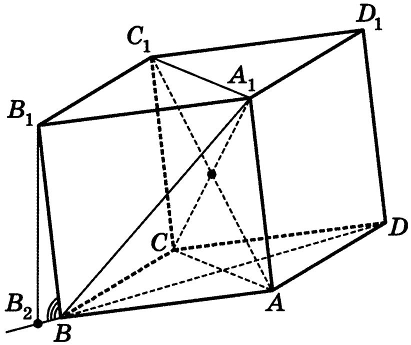
$$\cos(\angle ABC_1) = \frac{5^2+6^2-89}{2\cdot5\cdot6} = \frac{-28}{60} = -\frac{7}{15};$$

$$\sin(\angle ABC_1) = \sqrt{1-\left(-\frac{7}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

Значит $S_{BC_1D_1A} = 5 \cdot 6 \cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{15} = 8\sqrt{11}$,

т. е. $S_{BB_1D_1D} = S_{BC_1D_1A}$.

Рассмотрим диагональное сечение A_1BCD_1.



$A_1B = 6, \quad BC = 5.$

Тогда $S_{A_1BCD_1} = A_1B \cdot BC \cdot \sin(\angle A_1BC)$;

$A_1C = \sqrt{89}$.

Тогда из $\triangle A_1BC$

$$\cos(\angle A_1BC) = \frac{6^2 + 5^2 - 89}{2 \cdot 6 \cdot 5} = -\frac{7}{15};$$

$$\sin(\angle A_1BC) = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{15}.$$

$S_{A_1BCD_1} = 6 \cdot 5 \cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{15} = 8\sqrt{11}$ — площадь диагонального сечения, наименьшего по площади.

$S_{A_1BCD_1} = S_{BB_1D_1D} = S_{BC_1D_1A} = \boxed{8\sqrt{11}}$.

б) Найдите угол между боковым ребром и плоскостью основания (см. чертеж к пункту а).

Пусть $B_1B_2 \perp ABCD$. Значит $B_2 \in (BD)$, где BD — прямая.

Но B_2 не принадлежит отрезку BD,

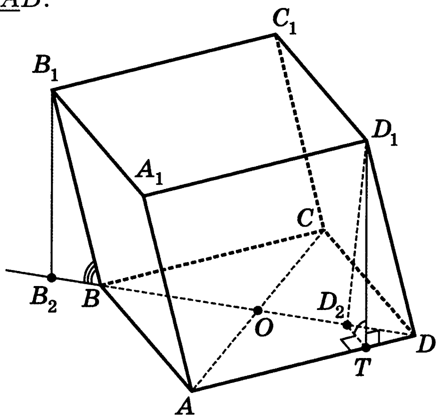
тогда $\left(\widehat{B_1B; ABCD}\right) = \angle B_1BB_2$ — тупой.

Но угол между прямой и плоскостью всегда не тупой,

т. е. $\angle B_1BB_2 = 180° - \left(180° - \arccos\dfrac{7}{15}\right) = \arccos\dfrac{7}{15}$.

в) Найдите двугранный угол при ребре основания,

т. е. $\angle D_1\underline{DA}B$.



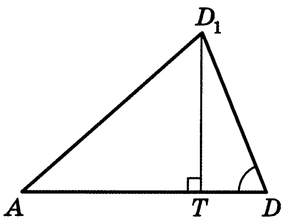
Построим $D_1D_2 \parallel B_1B_2$, тогда $D_2 \in BD$ и $D_1D_2 \perp ABCD$, значит $D_1D_2 = B_1B_2$ и $BB_2 = DD_2$.

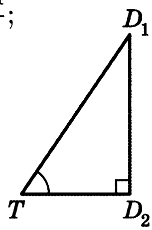
Рассмотрим $\triangle AOD$. Пусть $D_2T \perp AD$.

$AD_1 = 6$;

$\cos(\angle D_1DA) = \dfrac{5^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 5^2} = \dfrac{7}{25}$;

$\sin(\angle D_1DA) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{25}\right)^2} = \dfrac{24}{25}$;





$$D_1T = DD_1 \cdot \sin(\angle D_1DA); \quad D_1T = 5 \cdot \frac{24}{25} = \frac{24}{5};$$

$$\sin(\angle D_1TD_2) = \frac{D_1D_2}{D_1T};$$

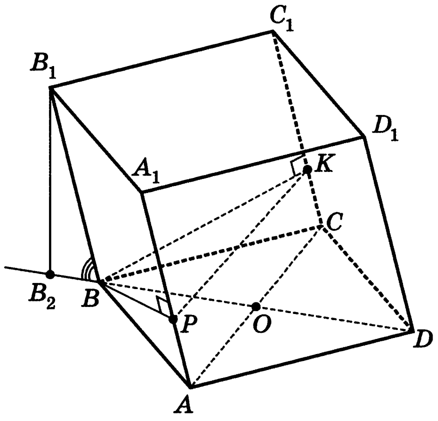
$$\sin(\angle D_1TD_2) = \frac{\frac{4}{3}\sqrt{11}}{\frac{24}{5}} = \frac{5}{18}\sqrt{11};$$

$$\cos(\angle D_1TD_2) = \sqrt{1 - \left(\frac{5\sqrt{11}}{18}\right)^2} = \frac{\sqrt{324-275}}{18} = \frac{7}{18},$$

значит $\angle D_1\underline{DA}B = \angle D_1TD_2 = \arccos\frac{7}{18}$.

г) Найдите двугранный угол при боковом ребре,

т. е. $\angle C\underline{BB_1}A_1$.



Построим $BP \perp AA_1$ и $BK \perp CC_1$.

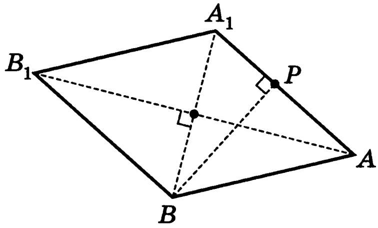
Значит $BP \perp BB_1$, $BK \perp BB_1$.

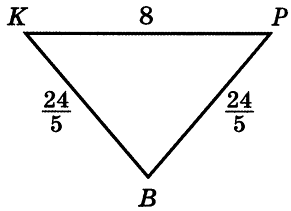
Так как $BB_1C_1C = BB_1A_1A$ (грани — равные ромбы), то $AP = CK$.

Для BB_1A_1A:

$$\cos(\angle BAA_1) = \frac{5^2+5^2-6^2}{2\cdot5\cdot5} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} \quad \left(\sin(\angle BAA_1) = \frac{24}{25}\right),$$

тогда для $\triangle BAP$: $AP = AB\cdot\cos(\angle BAA_1)$; $AP = 5\cdot\frac{7}{25} = \frac{7}{5}$.





$BP = \sqrt{AB^2 - AP^2}$ (можно сразу $BP = AB\sin(\angle BAA_1)$);

$$BP = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5} \ (PK \parallel AC) \text{ и } PK = AC.$$

Так как $BKP \perp BB$, то $\angle C\underline{BB_1}A_1 = \angle PBK$.

Из $\triangle PBK$ найдем: $\cos(\angle PBK) = \dfrac{\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 - 8^2}{2\left(\frac{24}{5}\right)^2} =$

$$= \frac{1152-1600}{1152} = \frac{-448}{1152} = -\frac{7}{18}.$$

Значит $\angle C\underline{BB_1}A_1 = \arccos\left(-\frac{7}{18}\right) = 180° - \arccos\frac{7}{18} > 90°$;

$$\boxed{\angle C\underline{BB_1}A_1 = 180° - \arccos\frac{7}{18} > 90°}.$$

д) Найдем объем призмы.

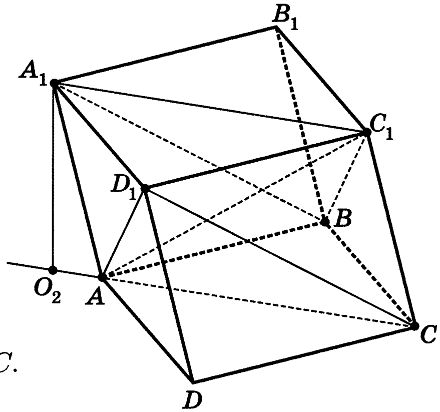
$$\sin(\angle B_1BB_2) = \sqrt{1 - \left(-\frac{7}{15}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{15};$$

$B_1B_2 = B_1B\sin(\angle B_1BB_2)$; $B_1B_2 = \dfrac{5\cdot4\sqrt{11}}{15} = \dfrac{4}{3}\sqrt{11}$;

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}\cdot B_1B_2$; $V = \dfrac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\dfrac{4}{3}\sqrt{11} = \boxed{32\sqrt{11}}$.

е) Найдите расстояние между только *наименьшими* скрещивающимися диагоналями смежных граней. (Обратите внимание: в этом пункте чертеж отличается от исходного.)

1. Найдем $\rho(A_1C_1; AD_1)$ $(AC = 6;\quad BD = 8)$.



Очевидно, что для данной призмы $A_1C_1 = 6$ и $AD_1 = 6$. Рассмотрим $\triangle BA_1C_1$ и $\triangle D_1AC$.

$\left.\begin{array}{l} AD_1 \parallel BC_1 \\ AC \parallel A_1C_1 \end{array}\right|,$

значит $BA_1C_1 \parallel D_1AC$.

Очевидно, что

$\rho(BA_1C_1; D_1AC) = \rho(AD_1; A_1C_1) = \rho(A; BA_1C_1)$.

Решить задачу обычными способами технически очень сложно. В данном случае покажем применение метода объемов (векторный способ рассмотрен в следующей главе).

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Так как $\cos(\angle A_1AC) = -\dfrac{7}{15}$, то

$\cos(\angle A_1AO_2) = \cos(180^\circ - \angle A_1AC) = \dfrac{7}{15}$;

$\sin(\angle A_1AO_2) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{7}{15}\right)^2} = \dfrac{4\sqrt{11}}{15}$.

Тогда $H_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AA_1 \cdot \sin(\angle A_1AO_2)$,

$\left.\begin{array}{l} H_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 5 \cdot \dfrac{4\sqrt{11}}{15} = \dfrac{4}{3}\sqrt{11} \\ S_{ABCD} = \dfrac{1}{2}AC \cdot BD, \text{т. е. } S_{ABCD} = 24 \end{array}\right|.$

Значит $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 24 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{11} = 32\sqrt{11}.$

$V_{C_1AA_1B_1B} = \frac{1}{3}V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$; $V_{C_1AA_1B_1B} = \frac{32}{3}\sqrt{11},$

где $C_1AA_1B_1B$ — пирамида с основанием AA_1B_1B.

$V_{C_1AA_1B} = \frac{1}{2}V_{C_1AA_1B_1B}$, т. е. $V_{C_1AA_1B} = \frac{16}{3}\sqrt{11},$

где C_1AA_1B — пирамида с основанием $\triangle A_1AB$.

С другой стороны, C_1AA_1B — пирамида,

где $\triangle BA_1C_1$ — основание; $H_{ABA_1C_1} = \rho(A; BA_1C_1)$.

Учтем, что

$V_{C_1AA_1B} = V_{ABA_1C_1} = \frac{1}{3}S_{\triangle BA_1C_1} \cdot H_{ABA_1C_1};$

$S_{\triangle BA_1C_1} = \sqrt{10(10-6)(10-6)(10-8)} = 8\sqrt{5}$, где

$p_{BA_1C_1} = \dfrac{6+6+8}{2} = 10$ ($A_1B = 8$; $A_1C_1 = 6$; $BC_1 = 6$).

Тогда $\frac{16}{3}\sqrt{11} = \frac{1}{3} \cdot 8\sqrt{5} \cdot H_{ABA_1C_1};$

$H_{ABA_1C_1} = 2\sqrt{\frac{11}{5}} = \frac{2}{5}\sqrt{55}.$

Следовательно, $\rho(A_1C_1; AD_1) = 0{,}4\sqrt{55}.$

Примечание

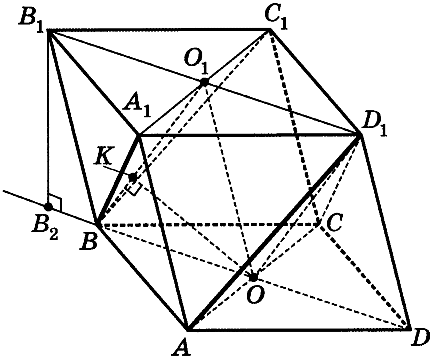
Из $\rho(BA_1C_1; D_1AC) = \boxed{0{,}4\sqrt{55}}$ следует, что

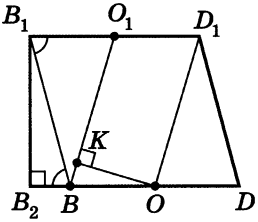
$\rho(AD_1; A_1C_1) = \rho(AC; BC_1) = \rho(AD_1; A_1B) =$

$= \rho(A_1C_1; D_1C) = \rho(D_1C; BC_1) = \rho(AC; A_1B) =$

$= 0{,}4\sqrt{55}.$

2. Найдите расстояние между только *наименьшими* скрещивающимися диагоналями $\rho(BA_1; AD_1)$. (Это другой способ решения — и другой чертеж.)





Напомним, что $BC_1 = BA_1 = 6$; $A_1C_1 = 8$; $BO = 3$.

Пусть $OK \perp BO_1$, $BB_1D_1D \perp AC$,

значит $OK \perp AC$, тогда $OK \perp BC_1A_1$.

$\rho(BA_1; AD_1) = \rho(BC_1A_1; D_1AC) = OK$.

$\cos(\angle O_1B_1B) = \cos(\angle B_1BB_2) = -\cos(\angle B_1BO) =$

$= -\left(-\frac{7}{15}\right) = \frac{7}{15}$;

$BO_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1O_1^2 - 2BB_1 \cdot B_1O_1 \cos(\angle O_1B_1B)}$;

$$BO_1 = \sqrt{5^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{7}{15}} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Используя метод площадей, получим:

$$\left.\begin{aligned} S_{BO_1D_1O} &= BO_1 \cdot KO = 2\sqrt{5} \cdot KO \\ S_{BO_1D_1O} &= BO \cdot B_1B_2 = 3 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{11} \end{aligned}\right| .$$

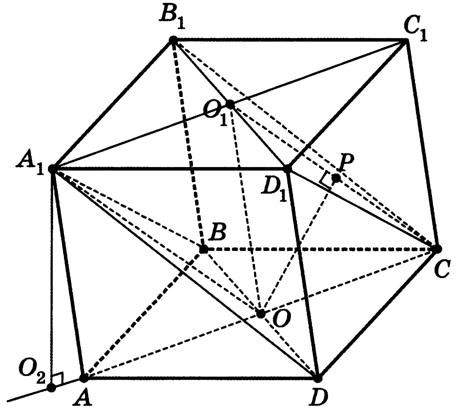
Значит $KO = \dfrac{3 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{11}}{2\sqrt{5}} = 2\sqrt{\dfrac{11}{5}} = \dfrac{2\sqrt{55}}{5} = 0{,}4\sqrt{55}$,

где $BO = 3$; $B_1B_2 = \dfrac{4}{3}\sqrt{11}$;

$\rho(BA_1; AD_1) = \rho(BC_1A_1; D_1AC) = KO = \boxed{0{,}4\sqrt{55}}$.

Примечание. Нужно быть внимательным, так как:
в случае 1 (стр. 155) $\rho(A_1C_1; AD_1) - \angle BAD$ — тупой;
в случае 2 (стр. 157) $\rho(BA_1; AD_1) - \angle ABC$ — тупой.
Несмотря на это, для данных чертежей речь идет о расстоянии между наименьшими скрещивающимися диагоналями смежных граней, которые **равны**: $\rho(BA_1; AC)$ (см. с. 155) и $\rho(AD_1; BA_1)$ (см. с. 157).

3. Расстояние между только *наибольшими* скрещивающимися диагоналями смежных граней: $\rho(A_1D; D_1C)$.



$A_1D = 8$, $D_1C = 8$.

$AC \perp BD$ ($ABCD$ — ромб); $A_1O \perp BD$ ($A_1D = A_1B$).

Тогда $BD \perp AA_1C_1C$, значит любая прямая, принадлежащая AA_1C_1C, перпендикулярна BD.

$\left.\begin{array}{l} A_1D \parallel B_1C \\ BD \parallel B_1D_1 \end{array}\right|$, значит $A_1BD \parallel CB_1D_1$.

Пусть $OP \perp O_1C$, тогда $OP \perp CB_1D_1$,

значит $\rho(A_1BD; CB_1D_1) = \rho(A_1D; D_1C) = OP$.

$A_1O = \sqrt{A_1D^2 - OD^2}$;

$A_1O = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$ ($A_1O = O_1C$);

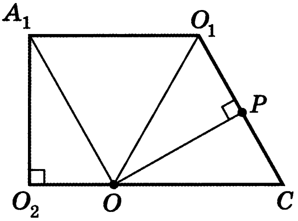
$$\cos(\angle A_1AO) = \frac{AA_1^2 + AO^2 - A_1O^2}{2AA_1 \cdot AO};$$

$$\cos(\angle A_1AO) = \frac{5^2 + 3^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot 5 \cdot 3} = -\frac{7}{15};$$

$AO_2 = AA_1 \cos(180° - \angle A_1AO) =$

$= AA_1(-\cos(\angle A_1AO)) = AA_1 \cdot \frac{7}{15}$;

$AO_2 = 5 \cdot \frac{7}{15} = \frac{7}{3}$.



Тогда $A_1O_2 = \sqrt{AA_1^2 - AO_2^2}$;

$$A_1O_2 = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{11}}{3}.$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{\triangle OO_1C} = \frac{1}{2} OC \cdot A_1O_2 \\ S_{\triangle OO_1C} = \frac{1}{2} O_1C \cdot OP \end{array}\right| ; \ OP = \frac{OC \cdot A_1O_2}{O_1C} \ (O_1C = A_1O);$$

$OP = \dfrac{3 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{11}}{4\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$. Следовательно

$$\rho(A_1D; D_1C) = \rho(A_1BD; CBD_1) = OP = \boxed{\frac{\sqrt{33}}{3}}.$$

Примечания

1. $\rho(A_1BD; CBD_1) = \rho(BD; D_1C) = \rho(BD; B_1C) =$
$= \rho(B_1D_1; A_1D) = \rho(B_1D_1; A_1B) = \rho(A_1B; B_1C) = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

2. $\triangle A_1BD = \triangle CB_1D_1$ — правильные.

Задача 3. Дан клин, основание которого — прямоугольник со сторонами 25 и 18. Боковые ребра клина равны 17. Ребро клина, параллельное большей стороне основания, равно 9. Найдите объем такого клина.

Дано:

$ABCDPK$ — клин

$ABCD$ — прямоугольник

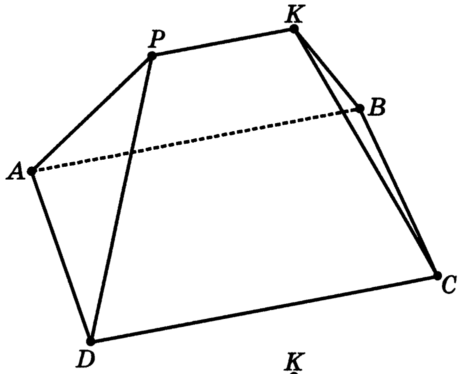
$AB = 25$

$AD = 18$

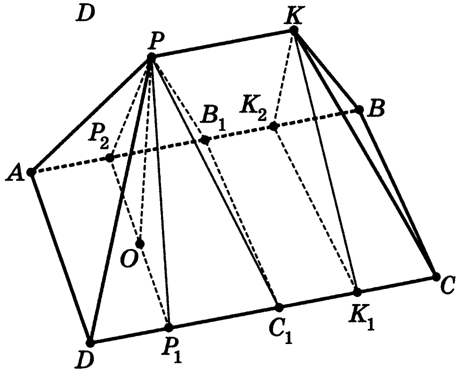
$PK \parallel AB$

$PK = 9$

$AP = DP =$
$= BK = CK = 17$



Найдите V_{ABCDPK}



Первый способ

а) Сделаем дополнительные построения:

$PP_1P_2 \perp ABCD$
$KK_1K_2 \perp ABCD$.

Значит, клин состоит из двух пирамид и треугольной призмы: $PADP_1P_2$, KK_2BCK_1, $PP_2P_1KK_2K_1$.

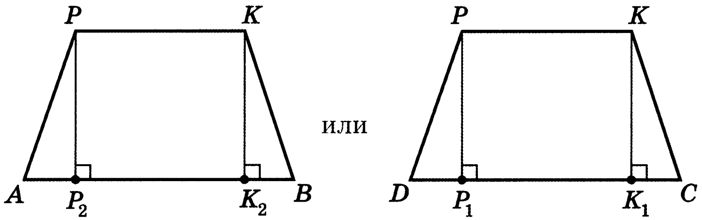
б) Рассмотрим четырехугольную пирамиду $PADP_1P_2$.

1. Так как $PP_1P_2 \perp ABCD$ по построению,

то $PP_2 \perp AB$, $PP_1 \perp DC$.

$$AP_2 = \frac{AB - PK}{2}, \text{ т. е. } AP_2 = \frac{25 - 9}{2} = 8$$

($APKB$ или $DPKC$ — равнобедренная трапеция).

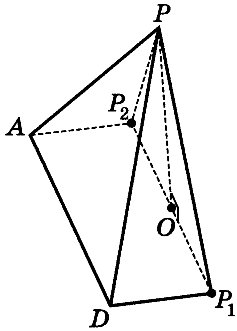


$AP_2 = 8$ (аналогично рассуждая, получим $DP_1 = 8$).

2. Из $\triangle APP_2$ по теореме Пифагора

$PP_2 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15;$

$PP_1 = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15.$



3. P_2PP_1 — равнобедренный треугольник.

Построим $PO \perp P_2P_1$.

Можно доказать, что тогда $PO \perp AP_2P_1D$;

$PO = \sqrt{P_2P^2 - OP_2^2} = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12,$

где $OP_2 = \frac{1}{2}P_2P_1 = \frac{1}{2}AD.$

б) $V_{PADP_1P_2} = \frac{1}{3}S_{AP_2P_1D} \cdot H_{PADP_1P_2};$

$V = \frac{1}{3}AD \cdot AP_2 \cdot OP;$

$V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 8 \cdot 12 = 576$ (куб. ед.).

в) Рассуждая аналогично, получим, что $V_{KBCK_1K_2} = 576$ (куб. ед.).

г) Так как $PP_1P_2KK_1K_2$ — прямая треугольная призма (докажите), то $V_{PP_1P_2KK_1K_2} = S_{\triangle PP_1P_2} \cdot PK$ ($PK \perp PP_1P_2$ — докажите).

1. $S_{\triangle PP_1P_2} = \dfrac{1}{2} P_2P_1 \cdot OP$;

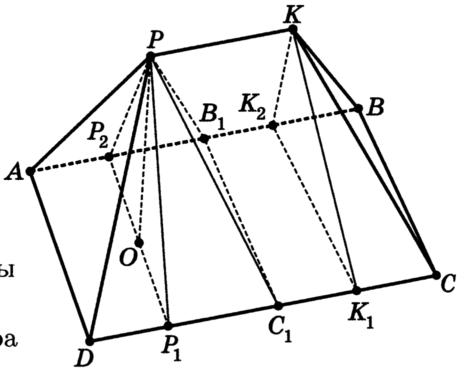
   $S_{\triangle PP_1P_2} = \dfrac{1}{2} \cdot 18 \cdot 12 = 108.$

2. $V_{PP_1P_2KK_1K_2} = 108 \cdot 9 = 972$ (куб. ед.).

д) $V_{ABCDPK} = 2V_{PADP_1P_2} + V_{PP_1P_2KK_1K_2}$;

$V_{ABCDPK} = 2 \cdot 576 + 972 = 2124$ (куб. ед.).

Второй способ



Пусть $PB_1C_1 \parallel KBC$ ($PB_1 \parallel KB$, $PC_1 \parallel KC$). Очевидно, что PB_1C_1KBC — наклонная призма. Известно, что объем призмы можно вычислить как произведение бокового ребра на площадь перпендикулярного сечения относительно бокового ребра.

$V_{PC_1B_1KBC} = S_{\triangle PP_2P_1} \cdot PK$, где $PP_1P_2 \perp PK$.

Значит $V_{PC_1B_1KBC} = V_{PP_1P_2KK_1K_2}$,

тогда $V_{PC_1B_1KBC} = 972$ (куб. ед.).

Далее $V_{PADC_1B_1} = \dfrac{1}{3} \cdot S_{ADC_1B_1} \cdot OP$;

$AB_1 = AB - PK$; $AB_1 = 25 - 9 = 16$;

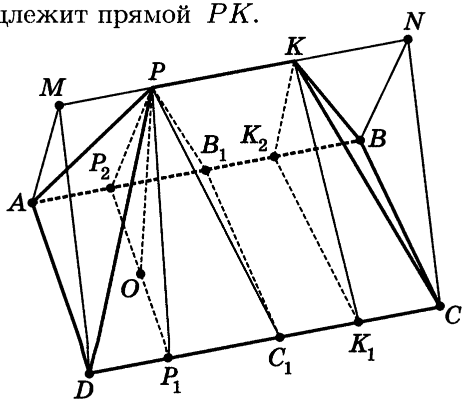
$S_{ADC_1B_1} = 18 \cdot 16 = 288$;

$V_{PADC_1B_1} = \dfrac{1}{3} \cdot 288 \cdot 12 = 1152.$

Тогда $V_{PADCBK} = 972 + 1152 = 2124$ (куб. ед.).

Третий способ

Объем клина можно вычислять иначе — достроив его до прямой треугольной призмы $AMDNBC$,
где $AMD \parallel P_2PP_1 \parallel BNC$
и MN принадлежит прямой PK.



Так как $MP = KN = DP_1 = 8$,

то $V_{APDKBC} = V_{AMDNBC} - 2 \cdot V_{PAMD}$,

где $V_{AMDNBC} = S_{\triangle AMD} \cdot MN$;

$S_{\triangle AMD} = S_{\triangle PP_1P_2} = 108$; $\quad MN = 25$;

$V_{AMDNBC} = 108 \cdot 25 = 2700$ (куб. ед.);

$V_{PAMD} = \dfrac{1}{3} \cdot 8 \cdot 108 = 8 \cdot 36 = 288$ (куб. ед.).

Значит $V_{APDKBC} = 2700 - 2 \cdot 288 = 2124$ (куб. ед.), что и требовалось доказать.

Построение сечений

Практикум 6

В основе построения сечений лежит четкое понимание и реализация ряда аксиом геометрии. Напомним формулировку некоторых аксиом и теорем, используемых при построении сечений.

Аксиома 1. Через любые три точки, не лежащие на прямой, можно повести плоскость, и притом только одну.

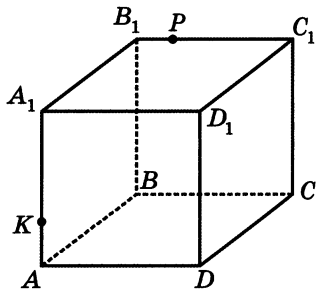
Аксиома 2. Если две различные точки прямой принадлежат плоскости, то и любые другие точки прямой принадлежат этой плоскости.

Кроме того, полезно знать ряд теорем-следствий из аксиом геометрии.

Теорема 1. Через любую прямую и точку вне ее можно провести плоскость, и притом только одну.

Теорема 2. Через любую точку вне данной прямой можно в пространстве провести параллельную данной прямую, и притом только одну.

1. Построим сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью KPD, где $K \in AA_1$ и $P \in B_1C_1$.



а) В данном случае две точки K и D принадлежат плоскости грани AA_1D_1D, т. е. $\left.\begin{array}{l} K \in AA_1D_1D \\ D \in AA_1D_1D \end{array}\right|$. Тогда прямая $DK \in AA_1D_1D$, значит прямые DK и D_1A_1 пересекаются, т. е. $DK \cap D_1A_1 = K_1$.

Пусть KPD — плоскость α, тогда $\left.\begin{array}{l} K_1 \in \alpha \\ K_1 \in A_1B_1C_1D_1 \end{array}\right|$.

б) Значит $\left.\begin{array}{l} K_1P \in A_1B_1C_1D_1 \\ K_1P \in \alpha\,(P \in \alpha) \end{array}\right|.$

Тогда $\left.\begin{array}{l} K_1P \cap A_1B_1 = K_2 \in \alpha \\ K_1P \cap D_1C_1 = P_1 \in \alpha \end{array}\right|$, следовательно,

KK_2 и K_2P — стороны многоугольника сечения.

в) $\left.\begin{array}{l} P_1 \in DD_1C_1C \\ D \in DD_1C_1C \end{array}\right|$, Значит $\left.\begin{array}{l} DP_1 \in DD_1C_1C \\ DP_1 \in \alpha \end{array}\right|.$

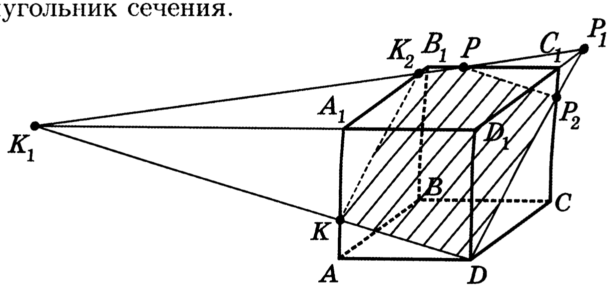
Следовательно, $DP_1 \cap CC_1 = P_2 \in \alpha$, тогда

PP_2 и DP_2 — стороны многоугольника сечения.

Подводя итоги, получим

$\boxed{ABCDA_1B_1C_1D_1 \cap PKD = KK_2PP_2D}$ —

пятиугольник сечения.



Примечания

1. Полезно осмыслить: какие аксиомы на каждом из шагов были использованы.

2. Обратите внимание на треугольник DK_1P_1, стороны которого принадлежат плоскостям трех смежных граней, которым принадлежат данные точки.

3. Прямую K_1P_1 иногда называют опорной прямой.

4. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

$$AB = a; \quad AK = \frac{1}{3}AA_1; \quad B_1P = \frac{1}{3}B_1C_1.$$

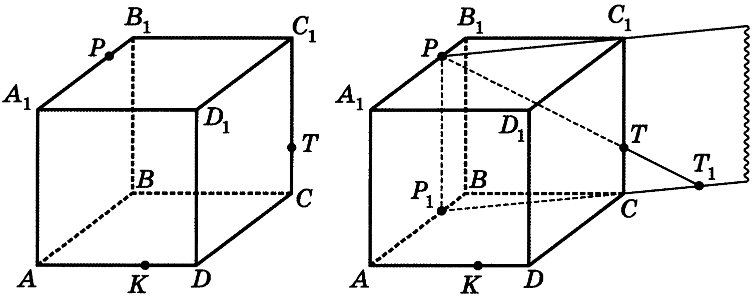
Задача для «головастиков»: найти площадь сечения.

$$\left(\boxed{S_{\text{сеч}} = \frac{17}{126}\sqrt{139}a^2}\right).$$

2. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью PKT, где точки P, K и T находятся:

1. На скрещивающихся ребрах A_1B_1, AD и CC_1 соответственно.

2. Между вершинами соответствующих ребер.



Пусть точки P, K, и T определяют плоскость α. В данном случае нет грани, которой бы одновременно принадлежали две точки (из данных).

а) Проведем $PP_1 \parallel BB_1$ ($PP_1 \parallel CC_1$).

Рассмотрим плоскость PP_1CC_1:

$P_1C \cap PT = T_1 \in \alpha$; $\quad T_1 \in ABCD$.

б) $\left.\begin{matrix} K \in ABCD \\ T_1 \in ABCD \end{matrix}\right|$, значит $\left.\begin{matrix} T_1K \cap DC = T_2 \in \alpha \\ T_1K \cap AB = K_1 \in \alpha \end{matrix}\right|$.

Тогда TT_2 и KT_2 — стороны многоугольника сечения.

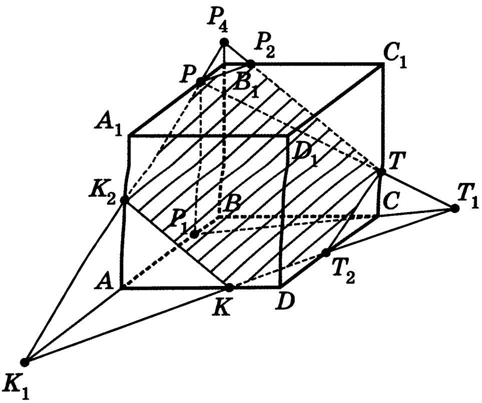
в) $\left.\begin{matrix} K_1 \in AA_1B_1B \\ P \in AA_1B_1B \end{matrix}\right|$, значит $\left.\begin{matrix} K_1P \cap AA_1 = K_2 \in \alpha \\ K_1P \cap BB_1 = P_4 \in \alpha \end{matrix}\right|$.

Тогда KK_2 и K_2P — стороны многоугольника сечения.

г) $\left.\begin{matrix} P_4 \in BB_1C_1C \\ T \in BB_1C_1C \end{matrix}\right|$, значит $P_4T \cap B_1C_1 = P_2 \in \alpha$.

Тогда P_2T — сторона многоугольника сечения.

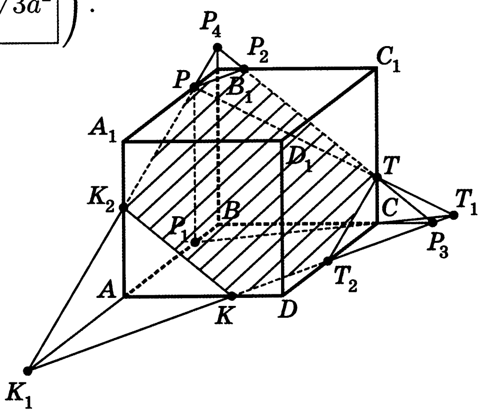
$\boxed{ABCDA_1B_1C_1D_1 \cap PKT = KK_2PP_2TT_2}$ — шестиугольник сечения.



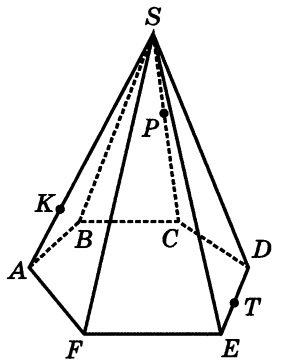
Примечания

1. Если прямую K_1T_1 пересечь прямой BC в точке P_3, то $P_3 \in K_1T_1$. Опять получим базовый треугольник $K_1P_4P_3$, стороны которого принадлежат плоскостям трех смежных граней, которым принадлежат исходные точки.

2. Положим, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, где $AB = a$, точки K, P, T — середины ребер. Можно вычислить площадь сечения, хотя это задача для «головастиков» $\left(\boxed{S_{\text{сеч}} = \frac{3}{4}\sqrt{3}a^2}\right)$.



3. Постройте сечение шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью PKT ($K \in AS$; $P \in CS$ и $T \in ED$).



Обозначим через α плоскость, которой принадлежат точки P, K и T.

Случай 1

а) Рассмотрим плоскость ASC.

$$\left.\begin{array}{l} PK \cap AC = K_1 \in \alpha; \quad K_1 \in ABCDEF \\ K_1T \cap AF = K_2 \in \alpha \end{array}\right| \text{, тогда}$$

KK_2 и K_2T — стороны многоугольника сечения.

б) $AB \cap K_1T = K_3$.

$$\left.\begin{array}{l} K_3K \in ASB \\ K_3K \cap SB = P_1 \in \alpha \end{array}\right| \text{, тогда}$$

P_1P и KP_1 — стороны многоугольника сечения.

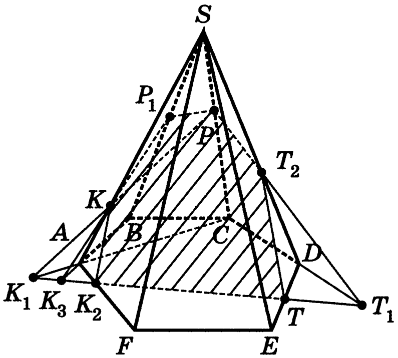
в) $K_1T \cap DC = T_1 \in \alpha$;

$$\left.\begin{array}{l} P \in \alpha \\ PT_1 \in \alpha \\ PT_1 \cap DS = T_2 \in \alpha \end{array}\right| \text{, тогда}$$

PT_2 и TT_2 — стороны многоугольника сечения.

В данном случае особенно наглядно видна роль опорной прямой K_1T.

$\boxed{SABCDEF \cap PKT = KP_1PT_2TK_2}$ — шестиугольник сечения.



Случай 2 связан с пересечением K_1T прямой FE, что возможно при несколько ином расположении точек K и P.

а) $\left.\begin{array}{l} PK \cap AC = K_1 \in \alpha \\ K_1T \cap FE = K_2 \in \alpha \end{array}\right|$ (K_1T — опорная прямая),

тогда K_2T — сторона многоугольника сечения.

б) Рассмотрим плоскость ASF.

$\left.\begin{array}{l} AF \cap K_1T = K_3 \in \alpha \\ KK_3 \cap FS = K_4 \in \alpha \end{array}\right|$, тогда

K_4K_2 и K_4K — стороны многоугольника сечения.

в) Рассмотрим плоскость ASB.

$\left.\begin{array}{l} AB \cap K_1T = K_5 \in \alpha \\ K_5K \cap BS = P_1 \in \alpha \end{array}\right|$, тогда

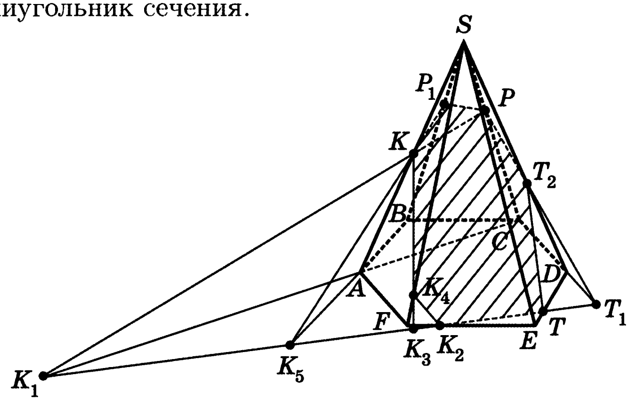
P_1P и KP_1 — стороны многоугольника сечения.

г) Рассмотрим плоскость CSD.

$PT_1 \cap DS = T_2$, тогда TT_2 и PT_2 — стороны многоугольника сечения.

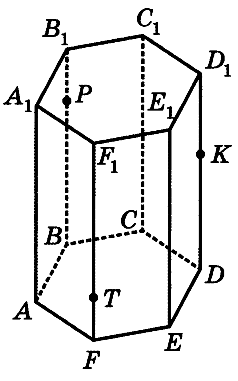
$\boxed{SABCDEF \cap PKT = KP_1PT_2TK_2K_4}$ —

семиугольник сечения.



Примечание. Пусть $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, где $AS = 2a$, $AB = a$, $AK = \frac{1}{4}AS$; $SP = \frac{1}{4}SC$; $ET = \frac{1}{2}ED$. Вычислите площадь сечения. Задача очень трудная даже для «головастиков».

4. Постройте сечение шестиугольной призмы $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ плоскостью PKT, где $P \in BB_1$; $K \in DD_1$; $T \in FF_1$.



Здесь также очень важно вначале построить опорную прямую.

а) Рассмотрим плоскость FF_1B_1B.

$BF \cap PT = T_1 \in \alpha; \quad T_1 \in ABCDEF.$

б) Рассмотрим плоскость BB_1D_1D.

$BD \cap PK = K_1 \in \alpha; \quad K_1 \in ABCDEF,$

тогда T_1K_1 — опорная прямая.

в) Рассмотрим плоскость AA_1F_1F.

$$\left.\begin{array}{l} AF \cap T_1K_1 = T_2 \\ T_2T \cap AA_1 = T_3 \in \alpha \end{array}\right|, \text{ тогда}$$

TT_3 и T_3P — стороны многоугольника сечения.

Отметим, что прямая T_2T может не пересекать ребро AA_1, а пересечь ребро A_1F_1, тогда построение пойдет несколько по другому пути, пересекая прямую AA_1 — разберите этот случай самостоятельно.

г) Рассмотрим DD_1E_1E.

$DE \cap T_1K_1 = K_2 \in \alpha;$

$K_2 \in ABCDEF; \quad K_2K \cap EE_1 = K_3,$ тогда

TK_3 и KK_3 — стороны многоугольника сечения.

д) Рассмотрим DD_1C_1C.

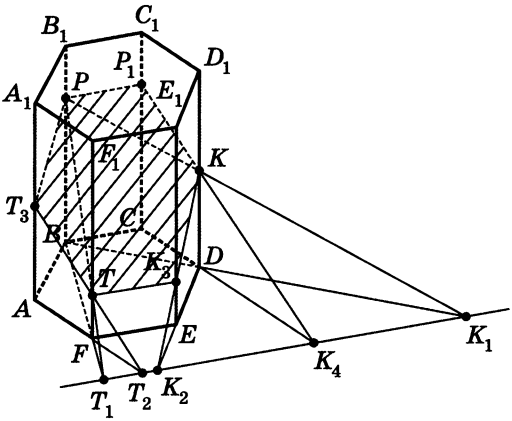
$$\left.\begin{array}{l} DC \cap T_1K_1 = K_4 \\ K_4K \cap CC_1 = P_1 \end{array}\right|,$$

тогда KP_1 и PP_1 — стороны многоугольника сечения.

Подводя итоги, получим

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1 \cap PKT = PP_1KK_3TT_3$ —

шестиугольник сечения.



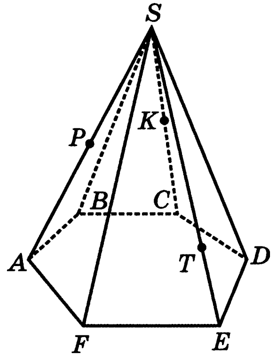
Примечания

1. Если K_4K пересечет ребро D_1C_1, то построение будет далее строиться по несколько другому сценарию. Рассмотрите эту возможность самостоятельно.

2. Так как у шестиугольной призмы восемь граней, то в сечении может получиться: треугольник, четырехугольник, пятиугольник, шестиугольник, семиугольник, восьмиугольник, но не более. Приведите примеры сечений для каждого многоугольника.

3. Пусть $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма, где $AA_1 = AB = a$; $FT = \frac{1}{4}FF_1$; $B_1P = \frac{1}{4}BB_1$; $DK = \frac{1}{2}DD_1$. Найдите площадь сечения — это задача для «головастиков» $\left(\boxed{\frac{3}{4}\sqrt{13}a^2}\right)$.

5. Постройте сечение шестиугольной пирамиды $SABCDEF$ плоскостью PKT, где $P \in AS$; $K \in CS$; $T \in ES$



Пусть $PKT \subset \alpha$.

а) Рассмотрим плоскость ASE.

$AE \cap PT = T_1 \in \alpha$; $T_1 \in ABCDEF$.

б) Рассмотрим плоскость CSE.

$CE \cap KT = T_2 \in \alpha$; $T_2 \in ABCDEF$.

Получили T_2T_1 — опорную прямую.

в) Рассмотрим SCD.

$$\left.\begin{array}{l} CD \cap T_2T_1 = K_1 \in \alpha \\ KK_1 \cap SD = K_2 \in \alpha \end{array}\right|, \text{ тогда}$$

KK_2 и TK_2 — стороны многоугольника сечения.

г) Рассмотрим ASF.

$$\left.\begin{array}{l} AF \cap T_2T_1 = P_1 \in \alpha \\ PP_1 \cap FS = P_2 \in \alpha \end{array}\right|, \text{ тогда}$$

TP_2 и PP_2 — стороны многоугольника сечения.

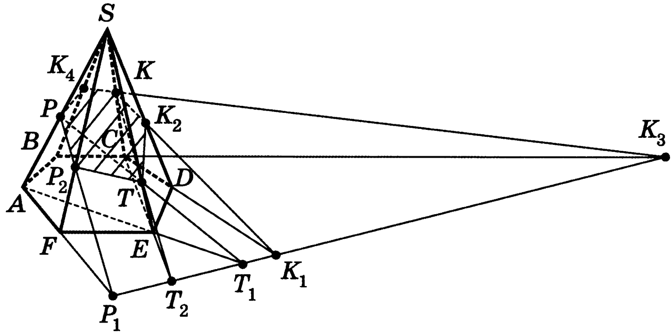
д) Рассмотрим BSC.

$$\left.\begin{array}{l} BC \cap T_2T_1 = K_3 \in \alpha \\ KK_3 \cap BS = K_4 \in \alpha \end{array}\right|, \text{ тогда}$$

KK_4 и PK_4 — стороны многоугольника сечения.

Подводя итоги, получим

$\boxed{SABCDEF \cap PKT = PK_4KK_2TP_2}$ — шестиугольник сечения.

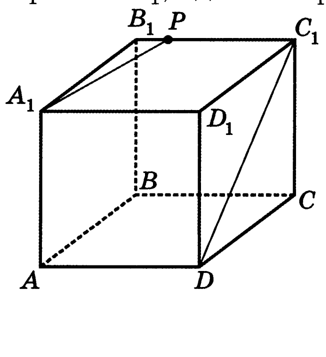


Примечания

1. Для построения сечения можно было использовать плоскость BSE, чтобы найти точку K_4.

2. Если рассматривать правильную шестиугольную пирамиду, где $AS = 2a$; $AB = a$; $AP = PS$; $CK = KS$; $ET = \frac{1}{4}SE$, то задача по нахождению площади сечения — весьма подходящая задача для упорных и настойчивых «головастиков» $\left(\boxed{S_{\text{сеч}} = \frac{33}{22}a^2}\right)$.

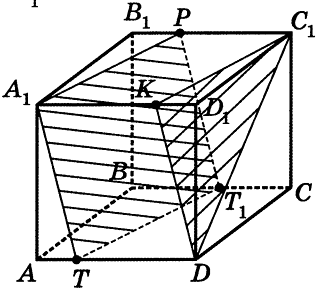
6. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельными плоскостями, проходящими через скрещивающиеся прямые A_1P и DC_1, где $P \in B_1C_1$.



а) Построим $C_1K \parallel A_1P$, где $K \in A_1D_1$,
тогда $\triangle DKC_1$ есть сечение, параллельное A_1P.

б) Проведем $A_1T \parallel DK$, тогда так как $\left.\begin{matrix} A_1P \parallel C_1K \\ A_1T \parallel DK \end{matrix}\right|$ (по построению), то $A_1TP \parallel DKC_1$.

в) Осталось достроить сечение $A_1TP \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.
Так как $A_1TP \parallel DKC_1$, то построим $TT_1 \parallel C_1K$, где $T_1 \in BC$, и соединим точки P и T_1.
Получили $A_1TT_1P = A_1TP \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$, где $A_1TT_1P \parallel DKC_1$.



Примечания. 1. Здесь при построении сечений использовался ряд теорем:

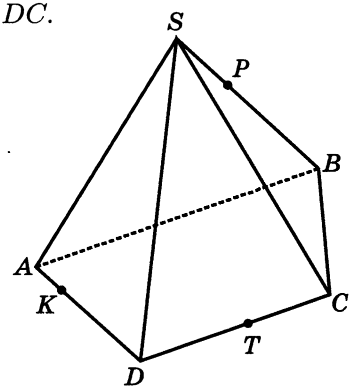
1. Любые две скрещивающиеся прямые единственным образом определяют пару параллельных плоскостей.

2. Если прямая a параллельна прямой b, а прямая b параллельна прямой c, то прямая a параллельна прямой c.

3. Если две параллельных плоскости пересечь третьей плоскостью, то линии их пересечения параллельны.

2. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб,
где $AB = a$, $B_1P = \frac{1}{3}B_1C_1$, то задача по вычислению площадей сечений — весьма простенькая для «головастиков» $\left(\boxed{S_{\text{сеч}} = \frac{\sqrt{11}}{6}a^2;\ \frac{\sqrt{11}}{3}a^2}\right)$.

7. Постройте сечение пирамиды $SABCD$, в основании которой лежит трапеция, плоскостью PKT, где $P \in SB$; $K \in AD$; $T \in DC$.



а) Пусть PKT — плоскость α.

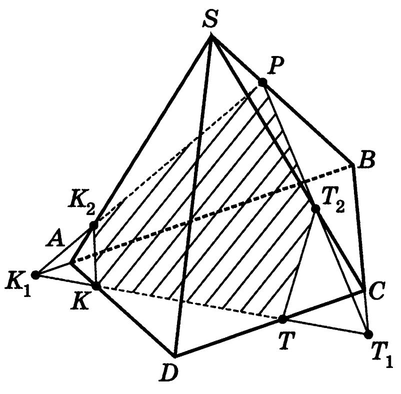
$$\left.\begin{array}{l} K \in ABCD \\ T \in ABCD \end{array}\right|, \text{ тогда } \begin{array}{l} TK \cap AB = K_1 \\ TK \cap BC = T_1 \end{array}.$$

Значит KT — сторона многоугольника сечения.

б) Рассмотрим ASB. $K_1P \cap AS = K_2$, тогда KK_2 и K_2P — стороны многоугольника сечения.

в) Рассмотрим BSC. $PT_1 \cap SC = T_2$, тогда TT_2 и PT_2 — стороны многоугольника сечения.

Следовательно, $\boxed{PKT \cap SABCD = PK_2KTT_2}$.

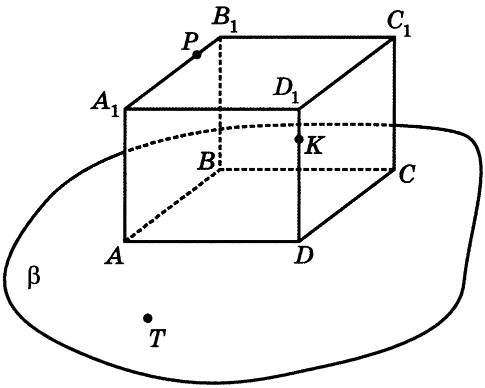


Примечание. Если $AD = DC = CB = a$;

$AS = BS = CS = DS = 2a$; $AK = \frac{1}{2}AD$; $DT = \frac{1}{2}DC$;

$SP = \frac{1}{2}SB$, то задача на вычисление площади сечения становится очень красивой для «головастиков» с учетом особенности трапеции основания.

8. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью PKT, где точки $P \in A_1B_1$, $K \in DD_1$, а точка T принадлежит плоскости $ABCD$, но не принадлежит параллелограмму $ABCD$.



Пусть $ABCD \subset \beta$, $PKT \subset \alpha$ — плоскость сечения.

а) Построим $PP_1 \parallel DD_1$. Рассмотрим PP_1DD_1.

$PK \cap P_1D = K_1 \in \beta$; $K_1 \in \alpha$,

тогда TK_1 — опорная прямая, принадлежащая α.

б) Рассмотрим DD_1C_1C.

$TK_1 \cap DC = K_3 \subset \beta$; $K_3 \subset \alpha$; $K_3K \cap CC_1 = K_2 \in \alpha$.

В данном случае $K_2K \cap D_1C_1 = P_2 \in \alpha$,

тогда KP_2 и PP_2 — стороны многоугольника сечения.

в) Рассмотрим BB_1D_1D.

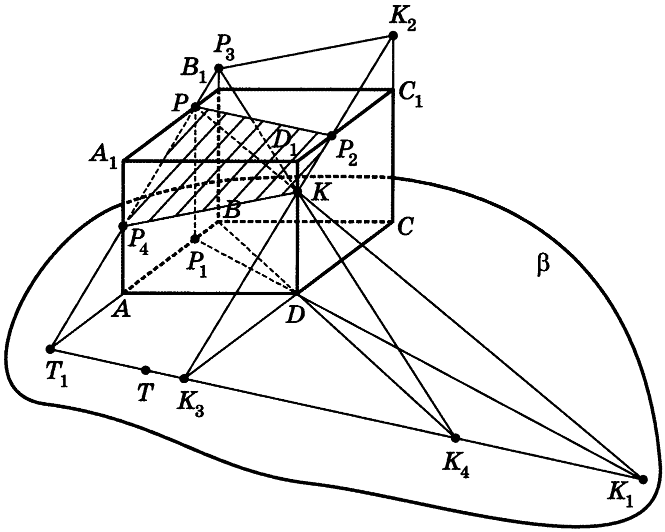
$$\left.\begin{array}{l} BD \cap TK_1 = K_4 \in \alpha \\ KK_4 \cap BB_1 = P_3 \in \alpha \end{array}\right|,$$

тогда $P_3 \in AA_1B_1B$ и $P \in AA_1B_1B$.

г) Рассмотрим AA_1B_1B.

$P_3P \cap AA_1 = P_4$, тогда PP_4 и P_4K — стороны многоугольника сечения.

Следовательно, $\boxed{ABCDA_1B_1C_1D_1 \cap PKT = PP_2KP_4}$.



Примечания

1. Можно было найти после построения опорной прямой TK_1 пересечение $TK_1 \cap AB = T_1$ и затем провести T_1P. В данном случае полезно проверить верность нахождения точек P_4, P_3 и так далее.

2. Если $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, где:

$$AB = a; \quad A_1P = \frac{1}{2}A_1B_1; \quad DK = \frac{1}{2}DD_1; \quad AT = DT = AD,$$

то задача на вычисление площади сечения — очень полезная и качественная для «головастиков».

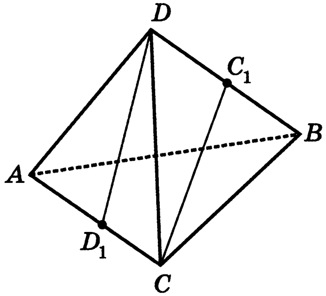
Тренировочная работа 4 (Углы, сечения, объемы)

Вариант 1

Дано:

$DABC$ — пирамида, у которой все ребра равны a

D_1, C_1 — середины ребер AC и DB



а) Докажите, что $DD_1 \lambda CC_1$.

б) Определите $\cos\left(\widehat{DD_1; CC_1}\right)$.

в) Постройте: $\alpha \parallel \beta$, где $\left.\begin{matrix} DD_1 \subset \alpha \\ CC_1 \subset \beta \end{matrix}\right|$.

$\alpha \cap ABCD = ?$

$\beta \cap ABCD = ?$

г) Найдите $S_{\alpha \cap ABCD}$; $S_{\beta \cap ABCD}$.

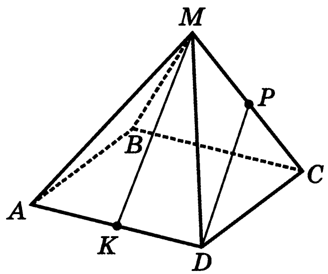
д) Найдите объем тела, ограниченного двумя данными параллельными плоскостями сечений и пирамидой $DABC$.

Вариант 2

Дано:

$MABCD$ — пирамида, у которой все ребра равны a

K, P — середины ребер AD и MC



а) Докажите: $MK \lambda DP$.

б) Определите: $\rho\left(\widehat{MK; DP}\right)$.

в) Постройте: $\alpha \parallel \beta$, где $\left.\begin{matrix} MK \subset \alpha \\ DP \subset \beta \end{matrix}\right|$.

$\alpha \cap MABCD = ?$

$\beta \cap MABCD = ?$

г) Найдите $S_{\alpha \cap MABCD}$; $S_{\beta \cap MABCD}$.

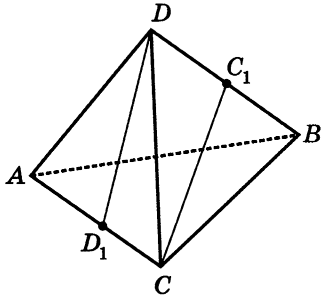
д) Найдите объем тела, ограниченного двумя данными параллельными плоскостями сечений и пирамидой $MABCD$.

Решение тренировочной работы 4

Вариант 1

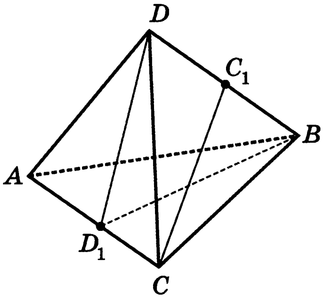
Дано:

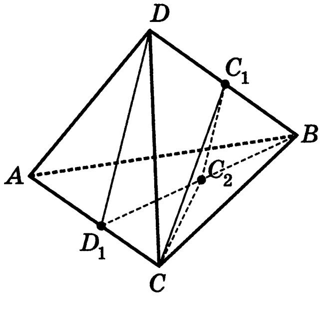
$DABC$ — пирамида, у которой все ребра равны a
D_1, C_1 — середины ребер AC и DB



а) Докажем, что $DD_1 \lambda CC_1$.

Действительно, по теореме существования (признаке скрещивающихся прямых) если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости ($DD_1 \subset ADC$), а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на данной прямой ($C_1C \cap ADC = l \notin DD_1$), то эти прямые являются скрещивающимися. Что и требовалось доказать.





б) Определим $\cos\left(\widehat{DD_1;CC_1}\right)$.

Рассмотрим $\triangle DD_1B$.

Проведем $C_1C_2 \parallel DD_1$.

Так как за угол между скрещивающимися прямыми принимается нетупой угол между пересекающимися прямыми, параллельными, соответственно, скрещивающимся прямым, то тогда

$$\rho\left(\widehat{DD_1;CC_1}\right) = \rho\left(\widehat{C_1C_2;CC_1}\right) = \rho(\angle CC_1C_2).$$

Найдем значение угла CC_1C_2.

1. Так как $DC_1 = BC_1$ (по условию), а $C_1C_2 \parallel DD_1$ (по построению), то $D_1C_2 = BC_2$; $C_1C_2 = \frac{1}{2}DD_1$ ($\triangle DD_1B$ подобен $\triangle C_1C_2B$).

2. $DD_1 = DC\sin 60^\circ$ (из $\triangle DCD_1$), т. е. $DD_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, значит $C_1C_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$ и $D_1C_2 = BC_2 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

   Очевидно, что и $CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (все ребра пирамиды равны, значит все грани — равносторонние треугольники).

3. Так как $D_1B = m_{AC}$, то $D_1B = H_{AC}$.

   Тогда из $\triangle C_2D_1C$ (прямоугольного) следует, что

   $CC_2 = \sqrt{D_1C^2 + D_1C_2^2}$,

   т. е. $CC_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

4. Рассмотрим $\triangle CC_1C_2$.

   $$\cos(\angle CC_1C_2) = \frac{CC_1^2 + C_1C_2^2 - CC_2^2}{2CC_1 \cdot C_1C_2},$$

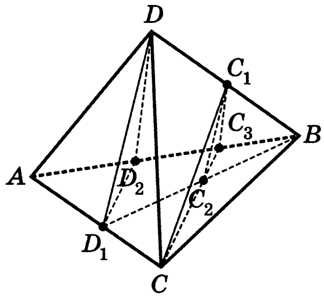
   т. е. $\cos(\angle CC_1C_2) = \dfrac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2 - \frac{7}{16}a^2}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{2}{3}$,

   значит $\cos\left(\widehat{DD_1; CC_1}\right) = \cos(\angle CC_1C_2) = \frac{2}{3}$;

   $\angle CC_1C_2 = \arccos\frac{2}{3}$; $\boxed{\cos\left(\widehat{DD_1; CC_1}\right) = \frac{2}{3}}$.

в) Построим: $\alpha \parallel \beta$, где $\left.\begin{matrix} DD_1 \subset \alpha \\ CC_1 \subset \beta \end{matrix}\right|$.

$\alpha \cap DABC = ?$
$\beta \cap DABC = ?$



Воспользуемся последним чертежом из предыдущего решения задания 2.

1. Продолжим CC_2 до пересечения с AB в точке C_3.

   Так как $C_2C_1 \parallel DD_1$, то $DD_1 \parallel CC_1C_3$, причем

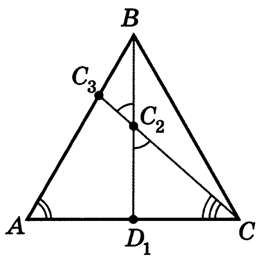
   $CC_1 \in CC_1C_3$ — плоскость β,

   т. е. $\beta \cap DABC = \triangle CC_1C_3$.

2. Проведем $D_1D_2 \parallel CC_3$.

   Так как $\left.\begin{matrix} DD_1 \parallel C_1C_2 \\ D_1D_2 \parallel CC_3 \end{matrix}\right|$, то по теореме-признаку параллельности двух плоскостей $D_1DD_2 \parallel CC_1C_3$, причем $DD_1 \subset D_1DD_2$ — плоскость α, т. е. $\alpha \parallel \beta$, где $\alpha \cap DABC = \triangle D_1DD_2$, что и требовалось доказать.

г) Найдите $S_{\alpha \cap DABC}$; $S_{\beta \cap DABC}$.



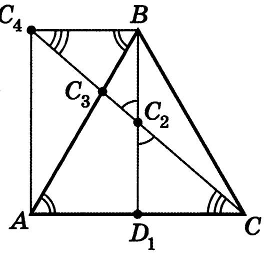
1. Рассмотрим $\triangle ABC$,

   где $BD_1 \perp AC$.

   $D_1C_2 = BC_2$

   по теореме Фалеса.

Построим $AC_4 \parallel D_1B$ и $C_4B \parallel AD_1$.



Тогда $\triangle CAC_4$ подобен $\triangle C_2D_1C$ с коэффициентом $k = 2$, значит $CC_4 = 2CC_2 = \dfrac{a\sqrt{7}}{2}$ $\left(CC_2 = \dfrac{a\sqrt{7}}{4}\right.$, см. пункт 2).

2. $\triangle ACC_3$ подобен $\triangle BC_4C_3$, где $k = 2$ $\left(\dfrac{AC}{BC_4} = 2\right)$.
Значит $CC_3 = 2C_4C_3$, тогда
$CC_3 = \dfrac{2}{3}CC_4$, т. е. $CC_3 = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$.

Аналогично $BC_3 = \dfrac{1}{3}AB$, т. е. $BC_3 = \dfrac{1}{3}a$.

3. Так как $C_1C_3 \parallel DD_2$ и $DC_1 = BC_1$, то $C_1C_3 = \dfrac{1}{2}DD_2$.

Рассуждая аналогично, получим, что $C_2C_3 = \dfrac{1}{2}D_1D_2$ и $C_1C_2 = \dfrac{1}{2}DD_1$, значит $\triangle C_1C_2C_3$ подобен $\triangle DD_1D_2$.

Тогда $S_{\triangle C_1C_2C_3} = \dfrac{1}{4}S_{DD_1D_2}$.

4. Найдем $S_{\triangle CC_1C_2}$. Так как

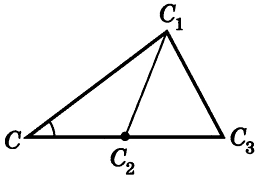
$\cos\left(\widehat{DD_1; CC_1}\right) = \cos\left(\widehat{C_1C_2; CC_1}\right) = \cos(\angle CC_1C_2) = \dfrac{2}{3}$,

то $\sin(\angle CC_1C_2) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Значит $S_{\triangle CC_1C_2} = \dfrac{1}{2}CC_1 \cdot C_1C_2 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3}$,

т. е. $S_{\triangle CC_1C_2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3}a^2 = \dfrac{\sqrt{5}}{16}a^2$.

5. Найдем $S_{\triangle CC_1C_3}$.



Из теоремы «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы» следует, что

$$\frac{S_{\triangle CC_1C_3}}{S_{\triangle CC_1C_2}} = \frac{CC_1 \cdot CC_3}{CC_1 \cdot CC_2}.$$

Тогда $S_{\triangle CC_1C_3} = S_{\triangle CC_1C_2} \cdot \dfrac{CC_3}{CC_2}$.

Значит $S_{\triangle CC_1C_3} = \dfrac{\sqrt{5}}{16} \cdot a^2 \cdot \dfrac{\frac{a\sqrt{7}}{3}}{\frac{a\sqrt{7}}{4}}$, т. е. $S_{\triangle CC_1C_3} = \dfrac{\sqrt{5}}{12}a^2$.

6. Так как $S_{\triangle C_1C_2C_3} = S_{\triangle CC_1C_3} - S_{\triangle CC_1C_2}$,

то $S_{\triangle C_1C_2C_3} = \dfrac{\sqrt{5}}{48}a^2$.

Ранее мы доказали, что $S_{\triangle D_1DD_2} = 4S_{\triangle C_1C_2C_3}$. Значит $S_{\triangle D_1DD_2} = \dfrac{\sqrt{5}}{12}a^2$.

Примечание. Мы пришли к вроде бы парадоксальному выводу $S_{\triangle D_1DD_2} = S_{\triangle CC_1C_3}$, т. е. к тому, что площади сечений равны.

Но если рассмотреть $\triangle D_1DD_2$ и CC_1C_3 более внимательно, то выяснится, что $D_1D = CC_1$; $DD_2 \parallel C_1C_3$; $D_1D_2 \parallel CC_3$, т. е. $\angle DD_2D_1 = \angle C_1C_3C$, т. е. мы находимся в условиях теоремы из пункта 5.

Значит $\dfrac{S_{\triangle D_1DD_2}}{S_{\triangle CC_1C_3}} = \dfrac{DD_2 \cdot D_1D_2}{C_1C_3 \cdot CC_3} = \dfrac{2C_1C_3 \cdot \frac{1}{2} \cdot CC_3}{C_1C_3 \cdot CC_3} = 1$,

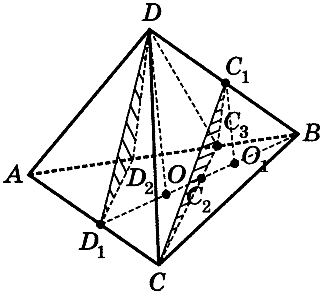
что и требовалось доказать.

В итоге $S_{\alpha \cap ABCD} = S_{\beta \cap ABCD} = \dfrac{\sqrt{5}}{12}a^2$.

д) Найдем объем тела, ограниченного двумя данными параллельными плоскостями сечений и пирамидой $DABC$.

Полученный многогранник $CC_1C_3D_1DD_2$ есть тело, состоящее из трех пирамид, например DD_1CD_2, DCD_2C_3 и DCC_1C_3, поэтому объем его выгоднее найти как разность объемов пирамид, например

$V_{DABC} - V_{DAD_1D_2} - V_{C_1CC_3B} = V_{CC_1C_3D_1DD_2}$.



Найдем V_{DABC} (напомним, что $DABC$ — правильная пирамида).

1. Построим $DO \perp ABC$.

$D_1O = \frac{1}{3}D_1B$, т. е. $D_1O = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

Из $AD = BD = CD = a$ следует, что

$AO = BO = CO$; $\quad DO = \sqrt{D_1D^2 - D_1O^2}$;

$$DO = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{30}}{6}.$$

2. $V_{DABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot H_{DABC}$,

т. е. $V_{DABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{10}a^3}{24}$.

3. $V_{DAD_1D_2} = \frac{1}{3} S_{\triangle AD_1D_2} \cdot H_{DABC}$.

Так как $S_{\triangle AD_1D_2} = \frac{1}{2} AD_1 \cdot AD_2 \sin(\angle CAB)$,

то $V_{DAD_1D_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{10}a^3}{144}$.

4. Построим $C_1O_1 \perp ABC$.

$C_1O_1 = \frac{1}{2} DO$ (по условию $DC_1 = BC_1$);

$V_{C_1CC_3B} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle CC_3B} \cdot \frac{1}{2} DO$;

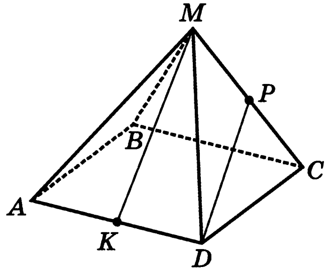
$V_{C_1CC_3B} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{3} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{30}}{6} = \frac{\sqrt{10}a^3}{144}$.

5. $V_{CC_1C_3D_1DD_2} = \frac{\sqrt{10}}{24} a^3 - \frac{\sqrt{10}a^3}{144} - \frac{\sqrt{10}a^3}{144} = \boxed{\frac{\sqrt{10}a^3}{36}}$.

Вариант 2

Дано:

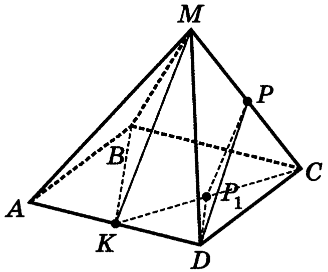
$MABCD$ — пирамида, у которой все ребра равны a
K, P — середины ребер AD и MC



а) Докажите: $MK \mathbin{\lambda} DP$.

Так как $MK \subset AMD$ и $PD \cap AMD = D \notin MK$, значит по теореме существования (признаку) $MK \mathbin{\lambda} DP$.

б) Определите $\rho\left(\widehat{MK; DP}\right)$.



1. Рассмотрим $\triangle MKC$.
   Проведем $PP_1 \parallel MK$,
   значит $KP_1 = CP_1$,
   тогда $\rho\left(\widehat{MK; DP}\right) =$
   $= \rho\left(\widehat{PP_1; DP}\right) = \rho(\angle DPP_1)$.

2. Так как $PP_1 \parallel MK$ и $MP = CP$, то $PP_1 = \frac{1}{2}MK$, где $MK = MD\sin 60^\circ$ ($\triangle AMD$ — равносторонний по условию), т.е. $MK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $PP_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

3. Из $\triangle CKD$ следует, что $CK = \sqrt{DK^2 + DC^2}$ ($ABCD$ — квадрат), т.е. $CK = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

   Известно, что $KP_1 = CP_1$. Так как $DP_1 = m_{CK}$, то по свойству медианы, проведенной к гипотенузе

   $DP_1 = KP_1 = CP_1 = \frac{a\sqrt{5}}{4}$.

4. Из $\triangle DPP_1$ следует, что

$$\cos(\angle DPP_1) = \frac{DP^2 + PP_1^2 - DP_1^2}{2DP \cdot PP_1}, \text{ где}$$

$$DP = \sqrt{DC^2 + CP^2 - 2DC \cdot CP \cos 60^\circ};$$

$$DP = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4} - 2a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

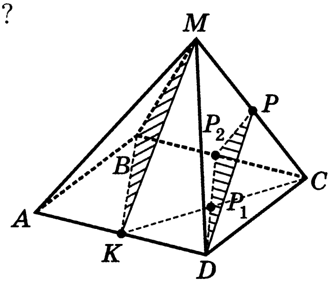
Тогда $\cos(\angle DPP_1) = \dfrac{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{16}a^2 - \frac{5}{16}a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{5}{6}.$

Значит $\cos\left(\widehat{MK; DP}\right) = \cos(\angle DPP_1) = \dfrac{5}{6}$,

т. е. $\boxed{\rho\left(\widehat{MK; DP}\right) = \arccos\frac{5}{6}}$.

в) Построим $\alpha \parallel \beta$, где $\left.\begin{array}{l} MK \subset \alpha \\ DP \subset \beta \end{array}\right|$.

$\alpha \cap MABCD = ?$
$\beta \cap MABCD = ?$



1. Продолжим DP_1 до точки $P_2 \in BC$.
   Тогда KP_2CD — параллелограмм (докажите) и $\triangle DPP_2 = \beta \cap MABCD$.
2. Так как $BP_2 = P_2C$ (докажите), то $MB \parallel PP_2$ и KBP_2D — параллелограмм, значит $KB \parallel DP_2$, следовательно $\triangle MKB = \alpha \cap MABCD$.

г) Найдите $S_{\alpha\cap MABCD}$; $S_{\beta\cap MABCD}$.

1. Так как $BK = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$, то $MK = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

   Тогда $\cos(\angle MBK) = \dfrac{MB^2 + BK^2 - MK^2}{2MB \cdot BK}$,

   т. е. $\cos(\angle MBK) = \dfrac{a^2 + \frac{5}{4}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2 \cdot a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a} = \dfrac{3\sqrt{5}}{10}$;

   $$\sin(\angle MBK) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \sqrt{\frac{100-45}{100}} = \frac{\sqrt{55}}{10}.$$

2. Так как $MB \parallel PP_2$ и $BK \parallel DP_2$,

   то $\angle MBK = \angle PP_2D$, тогда $\sin(\angle MBK) = \sin(\angle PP_2D)$.

3. $S_{\triangle MBK} = \dfrac{1}{2} MB \cdot BK \sin(\angle MBK)$,

   т. е. $S_{\triangle MBK} = \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{55}}{10} = \boxed{\dfrac{\sqrt{11}a^2}{8}}$.

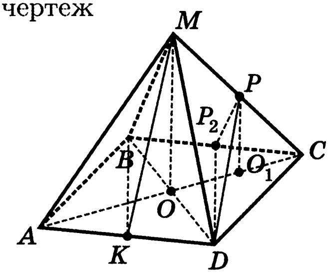
   $S_{\triangle PP_2D} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{55}}{10} = \boxed{\dfrac{\sqrt{11}a^2}{16}}$.

д) Найдем объем тела, ограниченного двумя данными параллельными плоскостями сечений и пирамидой $MABCD$.

1. Так как многогранник $MKBPDP_2$ есть объединение двух пирамид, например, $MBKDP_2$ и MP_2DP, причем V_{MP_2DP} найти довольно сложно, то V_{MKBPDP_2} проще найти как разность объемов:

   $$V_{MABCD} - V_{MABK} - V_{PDP_2C} = V_{MKBPDP_2}.$$

2. Рассмотрим чертеж



По условию $MABCD$ — правильная пирамида. Поэтому построим $MO \perp ABCD$.

Из $\triangle AMO$ $\quad OM = \sqrt{AM^2 - AO^2}$,

где $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$;

$$OM = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда $V_{MABCD} = \dfrac{1}{3}S_{ABCD} \cdot OM$;

$$V_{MABCD} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3.$$

3. $V_{MABK} = \dfrac{1}{3}S_{\triangle ABK} \cdot H_{MABCD}$,

т. е. $V_{MABK} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{24}$;

$$V_{PDP_2C} = \frac{1}{3}S_{\triangle DP_2C} \cdot H_{PDP_2C}.$$

Так как $S_{\triangle DP_2C} = \dfrac{1}{2}DC \cdot CP_2$, где $DC = a$, $\quad CP_2 = \dfrac{1}{2}a$

и $PO_1 = \dfrac{1}{2}MO$, то $V_{PDP_2C} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot a \cdot \dfrac{1}{2}a \cdot \dfrac{a\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}a^3}{48}$;

$$V_{MKBPDP_2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 - \frac{\sqrt{2}}{24}a^3 - \frac{\sqrt{2}}{48}a^3 = \boxed{\frac{5\sqrt{2}a^3}{48}}.$$

Дополнительное задание

Попробуйте сформулировать *текстовое* описание условий задач в вариантах 1 и 2 (с. 179).

Вот возможное текстовое задание условий этих задач.

Вариант 1

В треугольной пирамиде все ребра равны a.

а) Докажите, что прямые, которым принадлежат медианы смежных граней, не имеющие общих точек, есть скрещивающиеся прямые;

б) найдите косинус угла между ними;

в) постройте параллельные плоскости, проходящие через эти медианы;

г) найдите площадь сечений пирамиды этими параллельными плоскостями;

д) найдите объем тела, ограниченного этими параллельными плоскостями сечений и данной пирамидой.

Вариант 2

В четырехугольной пирамиде все ребра равны a.

а) Докажите, что прямые, которым принадлежат медианы смежных боковых граней, есть скрещивающиеся прямые;

б) найдите косинус угла между этими медианами;

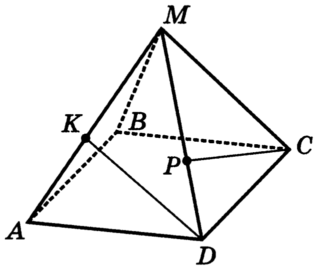
в) постройте параллельные плоскости, проходящие через эти медианы;

г) найдите площадь сечений пирамиды этими параллельными плоскостями;

д) найдите объем тела, ограниченного этими параллельными плоскостями сечений и данной пирамидой.

Примечание. В данном случае для текстового задания условий задачи варианта 2 возможна и другая интерпретация условий.

Дано:
$MABCD$ — пирамида, у которой все ребра равны a
$AK = MK$
$DP = MP$



а) Докажите, что $DK \lambda CP$.

б) Определите $\cos\left(\widehat{DK;CP}\right)$.

в) Постройте $\alpha \parallel \beta$, где $\left.\begin{matrix} DK \in \alpha \\ CP \in \beta \end{matrix}\right|$.

$\alpha \parallel \beta$
$\alpha \cap MABCD = ?$
$\beta \cap MABCD = ?$

г) Найдите $S_{\alpha \cap MABCD}$; $S_{\beta \cap MABCD}$.

д) Найдите объем тела, ограниченного двумя данными параллельными плоскостями сечений и пирамидой $MABCD$.

Попробуйте самостоятельно решить этот вариант задачи, хотя это достаточно трудная задача.

Приведем пример более точного текстового описания задачи варианта 2. Для этого необходимо только изменить первый пункт. Он должен быть сформулирован следующим образом:

а) докажите, что если одна из медиан смежных боковых граней исходит из вершины пирамиды, а другая медиана исходит из вершины стороны нижнего основания, то прямые, которым они принадлежат, являются скрещивающимися.

Тогда вариант из примечания (стр. 191, 192) будет невозможным.

Задача-исследование на сечения

Задача. В основании прямой призмы лежит трапеция, острые углы которой равны $60°$. Боковая сторона и меньшее основание трапеции равны, соответственно, 8 и 6. Через боковую сторону трапеции нижнего основания и вершину большего основания трапеции верхнего основания проведено сечение плоскостью, образующей с плоскостью нижнего основания угол в $30°$. Найдите:

а) объем призмы;

б) площадь данного сечения;

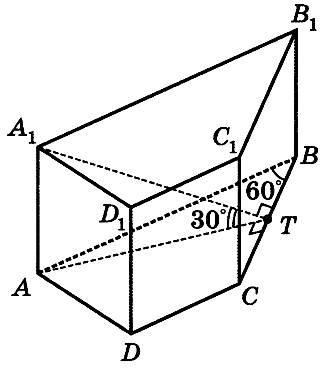
в) площадь сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через боковую сторону нижнего основания и наименьшую диагональ боковой грани призмы;

г)* площадь сечения призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через диагональ боковой грани, которая проходит через боковую сторону нижнего основания трапеции, и середину другой боковой стороны трапеции нижнего основания.

а) Найдем $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма
$AA_1 \perp ABCD$, $AB \parallel DC$
$AD = 8$, $DC = 6$
$\angle A = \angle B = 60°$
$\rho\left(A_1\widehat{BC; AB}CD\right) = 30°$

Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.



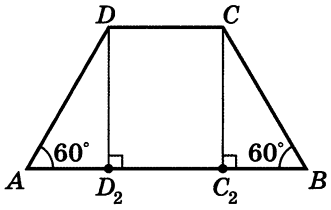
1. Так как $\angle A = \angle B$, то $AD = BC$.

Построим $AT \perp BC$. Так как $AA_1 \perp ABCD$ по условию, то по теореме о трех перпендикулярах $A_1T \perp BC$, тогда $BC \perp A_1TA$. Значит

$$\rho\left(A_1\widehat{BC; AB}CD\right) = \rho\left(\angle A_1\underline{BC}A\right) = \rho\left(\angle A_1TA\right) = 30°.$$

2. Рассмотрим $ABCD$.

Положим $DD_2 \perp AB$; $CC_2 \perp AB$.



Из $\triangle ADD_2$:

$DD_2 = AD \sin 60°$; $DD_2 = 8 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$;

$AD_2 = AD \cos 60°$; $AD_2 = 8 \cdot \dfrac{1}{2} = 4$.

$\triangle AD_2D = \triangle BC_2C$, тогда $AD_2 = BC_2$,

значит $AB = 2 \cdot AD_2 + D_2C_2$.

Отсюда следует ($DC = D_2C_2$), что $AB = 2 \cdot 4 + 6 = 14$.

$S_{ABCD} = \dfrac{AB + DC}{2} DD_2$; $S_{ABCD} = \dfrac{14+6}{2} \cdot 4\sqrt{3} = 40\sqrt{3}$.

3. Из $\triangle ABT$:

$AT = AB \sin 60°$, т. е. $AT = 14 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}$.

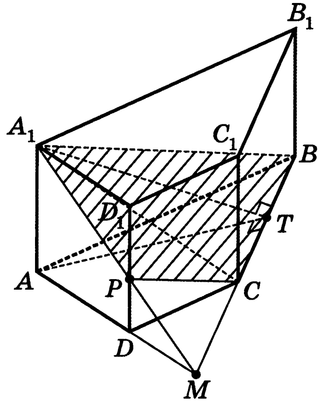
Из $\triangle A_1AT$:

$AA_1 = AT \cdot \operatorname{tg} 30°$, т. е. $AA_1 = 7\sqrt{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = 7$.

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot AA_1$,

т. е. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 40\sqrt{3} \cdot 7 = \boxed{280\sqrt{3}}$ (куб. ед.).

б) Найдем $S_{\text{сеч}}$.



1. Для построения сечения по вершине A_1 и отрезку BC продолжим BC до пересечения с продолжением AD.

   $AD \cap BC = M$, тогда $A_1M \in AA_1D_1D$.

   $A_1M \cap DD_1 = P$, значит A_1P и PC — стороны многоугольника сечения.

2. Для нахождения площади сечения напомним ряд теоретических положений.

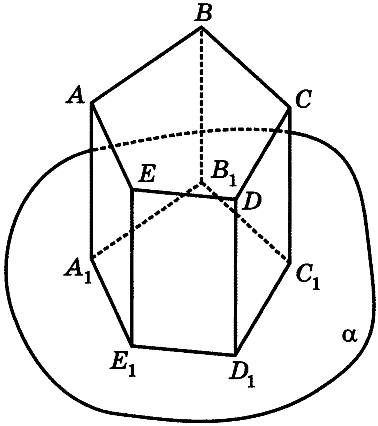
   Площадь ортогональной (перпендикулярной) проекции многоугольника равна площади многоугольника, умноженной на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.

   $\boxed{S_{\text{пр}} = S\cos\varphi}$, или $S = \dfrac{S_{\text{пр}}}{\cos\varphi}$.

   Например, дан $ABCDE$ — многоугольник.

   $A_1B_1C_1D_1E_1 = \text{Пр}\,(ABCDE)$, где $A_1B_1C_1D_1E_1 \in \alpha$;

   $AA_1 \perp \alpha$; $BB_1 \perp \alpha$; $CC_1 \perp \alpha$; $DD_1 \perp \alpha$; $EE_1 \perp \alpha$, причем $\left(\widehat{ABCDE; A_1B_1C_1D_1E_1}\right) = \varphi$.



Вернемся к данной задаче (стр. 195). Очевидно, что ортогональной проекцией A_1BCP является $ABCD$, где $\rho\left(A_1\widehat{BCP; AB}CD\right) = \rho(\angle A_1BCD) = \rho(\angle A_1TA) = 30°$.

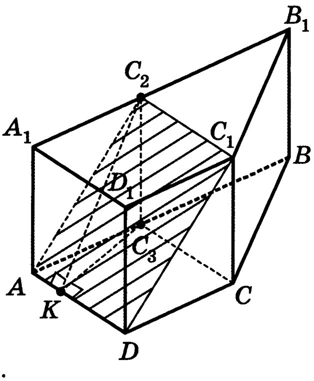
Значит $S_{ABCD} = S_{A_1BCD}\cdot\cos\varphi$; $S_{A_1BCP} = \dfrac{S_{ABCD}}{\cos 30°}$,

т. е. $S_{A_1BCP} = \dfrac{40\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \boxed{80}$.

в) Очевидно, что DC_1 — наименьшая диагональ боковых граней призмы.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма
$AA_1 \perp ABCD$
$AB \parallel DC$
$AD = 8$, $DC = 6$
$\angle A = \angle B = 60°$
$\rho\left(A_1\widehat{BC; AB}CD\right) = 30°$



Найдите $S_{\text{сеч.}\,(ADC_1\,\cap\,ABCDA_1B_1C_1D_1)}$.

Напомним, что если две параллельные плоскости пересечь третьей, то линии их пересечения также параллельны.

1. Так как $ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$,

   то $(ADC_1 \cap A_1B_1C_1D_1) = C_1C_2$, причем $AD \parallel C_1C_2$.

   Тогда $(ADC_1 \cap ABCDA_1B_1C_1D_1) = ADC_1C_2$.

   При этом так как $AA_1B_1B \parallel DD_1C_1C$, то $AC_2 \parallel DC_1$, значит ADC_1C_2 — параллелограмм.

   $\text{Пр}_{ABCD}(ADC_1C_2)$ — проекция ADC_1C_2 на $ABCD$, причем ортогональная,

   т. е. $\text{Пр}_{ABCD}(ADC_1C_2) = ADCC_3$, где $C_2C_3 \parallel CC_1$,

   а значит $CC_3 \perp ABCD$.

2. Очевидно, что $ADCC_3$ — параллелограмм.

   $S_{ADCC_3} = AD \cdot AC_3 \cdot \sin 60°$, т. е. $S_{ADCC_3} = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}$

   $(AC_3 = A_1C_2 = D_1C_1 = DC = 6)$.

3. Построим $C_3K \perp AD$, тогда так как $C_2C_3 \perp ABCD$, то по теореме о трех перпендикулярах $C_2K \perp AD$, значит $C_2KC_3 \perp AD$.

   Значит $\rho\left(ADC_1\widehat{C_2; A}BCD\right) = \rho(\angle C_2KC_3)$.

   $C_3K = AC_3 \sin 60°$: $\quad C_3K = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$.

   $\operatorname{tg}(\angle C_2KC_3) = \frac{C_2C_3}{C_3K}$; $\quad \operatorname{tg}(\angle C_2KC_3) = \frac{7}{3\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{9}$;

   $\boxed{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}}$ $\quad (0 < \alpha < 90°)$;

   $$\cos(\angle C_2KC_3) = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{7\sqrt{3}}{9}\right)^2 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{49 \cdot 3 + 81}} = \frac{9}{\sqrt{228}} =$$

   $$= \frac{9\sqrt{228}}{4 \cdot 3 \cdot 19} = \frac{3\sqrt{57}}{2 \cdot 19}.$$

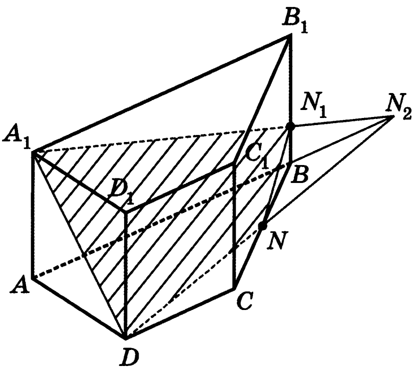
4. $S_{\text{сеч.}\,(ADC_1 \cap ABCDA_1B_1C_1D_1)} = S_{ADC_1C_2} = \frac{S_{ADCC_3}}{\cos(\angle C_2KC_3)}$;

   $S_{ADC_1C_2} = \frac{24\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 19}{3\sqrt{57}} = \boxed{16\sqrt{19}}$ (кв. ед.).

г)* **Вариант 1**

Рассмотрим вариант прохождения плоскости сечения $S_{\text{сеч.}\ (A_1DN \cap ABCDA_1B_1C_1D_1)}$ через диагональ A_1D и точку N.

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма
$AA_1 \perp ABCD$, $AB \parallel DC$
$AD = 8$, $DC = 6$
$\angle A = \angle B = 60°$
$\rho\left(A_1\widehat{BC; ABC}\right) = 30°$
$CN = BN$; $N \in BC$



Найдите $S_{\text{сеч.}\ (A_1DN \cap ABCDA_1B_1C_1D_1)}$

1. Построим сечение $A_1DN \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

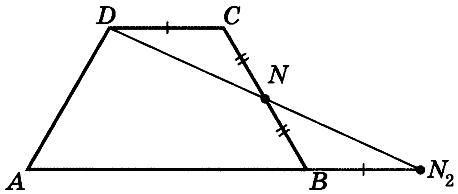
   Продолжим DN и AB до пересечения в точке $N_2 \in AB$. $ADN \subset ABCD$; $DN \cap AB = N_2$;

   $A_1N_2 \subset AA_1B_1B$; $A_1N_2 \cap BB_1 = N_1$.

   Значит $A_1DN \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = A_1DNN_1$,

   т. е. $S_{A_1DNN_1} = S_{\text{сеч.}\ (A_1DN \cap ABCDA_1B_1C_1D_1)}$.

2. Рассмотрим $\triangle ADN_2$.



   Так как $\triangle DCN = \triangle N_2BN$,

   то $S_{ABCD} = S_{\triangle ADN_2} = 40\sqrt{3}$.

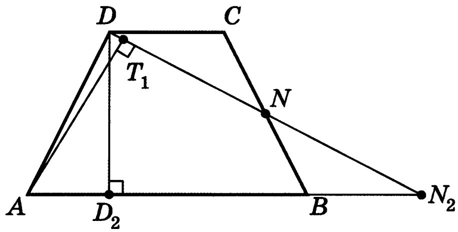
$$S_{\triangle DCN} = \frac{1}{2} DC \cdot CN \cdot \sin 120°,$$

т. е. $S_{\triangle DCN} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

$$S_{ABND} = S_{ABCD} - S_{\triangle DCN},$$

т. е. $S_{ABND} = 40\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 34\sqrt{3}$.

3. Пусть $AT_1 \perp DN_2$.



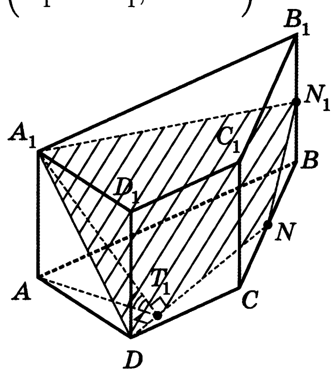
$DN_2 = \sqrt{DD_2^2 + D_2N_2^2}$; $\quad D_2N_2 = AN_2 - AD_2$;

$D_2N_2 = 20 - 4 = 16$.

Тогда $DN_2 = \sqrt{\left(4\sqrt{3}\right)^2 + 256} = \sqrt{48 + 256} = 4\sqrt{19}$.

$AT_1 = \frac{2S_{\triangle ADN_2}}{DN_2}$; $\quad AT_1 = \frac{80\sqrt{3}}{4\sqrt{19}} = 20\sqrt{\frac{3}{19}}$.

4. Рассмотрим $\left(\widehat{A_1DNN_1; ABCD}\right)$.



Так как $AT_1 \perp DN$ и $AA_1 \perp ABCD$, то по теореме о трех перпендикулярах $A_1T_1 \perp DN$. Тогда $A_1T_1A \perp DN$, значит $\rho\left(\widehat{ABCD; A_1}DNN_1\right) = \rho\,(\angle A_1T_1A)$;

$$\operatorname{tg}(\angle A_1T_1A) = \frac{AA_1}{AT_1}; \quad \operatorname{tg}(\angle A_1T_1A) = \frac{7\sqrt{19}}{20\sqrt{3}}.$$

Найдем $\cos(\angle A_1T_1A)$.

$$\cos(\angle A_1T_1A) = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(A_1T_1A)}};$$

$$\cos(\angle A_1T_1A) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{49\cdot19}{1200}}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{1200+931}} = \frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2131}}.$$

$$S_{A_1DNN_1} = \frac{S_{ABND}}{\cos(\angle A_1T_1A)},$$

т. е. $S_{A_1DNN_1} = \dfrac{34\sqrt{3}}{\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{2131}}} = \boxed{1{,}7\sqrt{2131}}$ (кв. ед.).

Вариант 2. Теперь рассмотрим вариант прохождения плоскости сечения через диагональ AD_1 и точку F — середину BC.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма

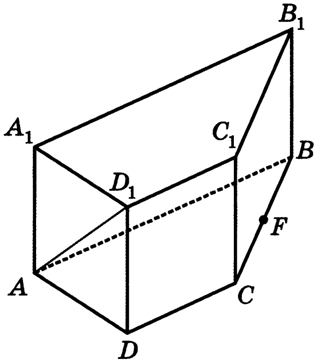
$AA_1 \perp ABCD$, $AB \parallel DC$

$AD = 8$; $DC = 6$

$\angle A = \angle B = 60°$

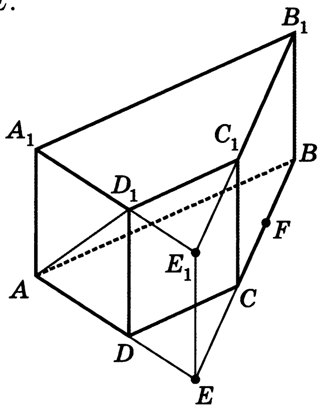
$CF = BF \subset BC$

$\rho(A_1BC; ABCD) = 30°$



Найдите $S_{\text{сеч.}\,(AD_1F\,\cap\,ABCDA_1B_1C_1D_1)}$

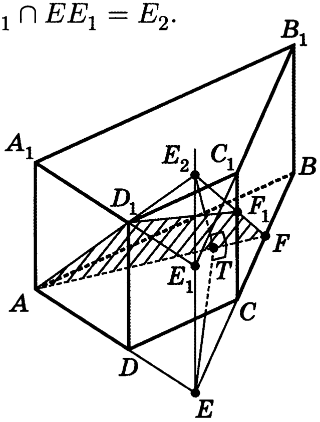
1. Продолжим AD до пересечения с продолжением BC: $AD \cap BC = E$.



Очевидно, что $\triangle AEB$ — равносторонний, значит $DE = CE = 6$, тогда $AEBA_1E_1B_1$ — правильная призма.

2. Для построения сечения найдем пересечение продолжения AD_1 с продолжением EE_1.

Получим $AD_1 \cap EE_1 = E_2$.



Так как $E_2F \in EE_1B_1B$, то найдем $E_2F \cap CC_1 = F_1$.

Тогда $ABCDA_1B_1C_1D_1 \cap AD_1F = AD_1F_1F$ — многоугольник сечения.

3. Положим $ET \perp AF$, тогда так как $E_2E \perp ABE$, то по теореме о трех перпендикулярах $E_2T \perp AF$.

4. Из $\triangle ABF$: $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2 - 2AB \cdot BF \cos 60^\circ}$;

$$AF = \sqrt{14^2 + 4^2 - 2 \cdot 14 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{196 + 16 - 56} =$$

$$= \sqrt{156} = 2\sqrt{39}.$$

$$S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} AE \cdot BE \sin 60^\circ;$$

$$S_{\triangle AEB} = \frac{1}{2} \cdot 14^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3};$$

$$S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 14\sqrt{3},$$

значит $S_{\triangle AEF} = 49\sqrt{3} - 14\sqrt{3} = 35\sqrt{3}$.

$$ET = \frac{2S_{\triangle AEF}}{AF}; \quad ET = \frac{2 \cdot 35\sqrt{3}}{2\sqrt{39}} = \frac{35}{13}\sqrt{13}.$$

5. Далее можно решать задачу аналогично первому варианту, т. е. найти $\cos(\angle E_2TE)$, затем S_{A_1FCD} и т. д. Но это достаточно сложно, хотя весьма полезно и поучительно. Поэтому рассмотрим другой способ решения.

Из подобия $\triangle AE_2E$ и $\triangle D_1E_2E_1$ следует, что

$$\frac{D_1E_1}{E_2E_1} = \frac{AE}{EE_1 + E_2E_1}, \text{ т. е. } \frac{6}{E_2E_1} = \frac{14}{7 + E_2E_1},$$

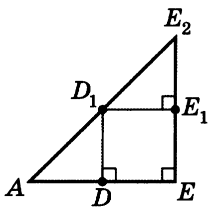
значит $E_2E_1 = 5{,}25$, тогда $EE_2 = 7 + 5{,}25 = 12{,}25$.

$\triangle AEE_2$ подобен $\triangle D_1E_1E_2$, тогда

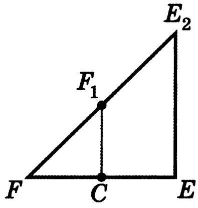
$$\frac{D_1E_2}{D_1E_1} = \frac{AE_2}{AE};$$

$$D_1E_2 = \frac{6}{14} AE_2;$$

$$D_1E_2 = \frac{3}{7} AE_2.$$



$\triangle FEE_2$ подобен $\triangle FCF_1$, тогда

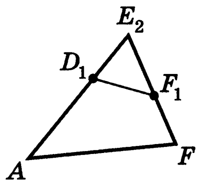


$$\frac{FF_1}{FC} = \frac{FE_2}{EF} \; (EF = 10);$$

$$FF_1 = \frac{4}{10}FE_2 = \frac{2}{5}FE_2,$$

значит $F_1E_2 = \dfrac{3}{5}FE_2$.

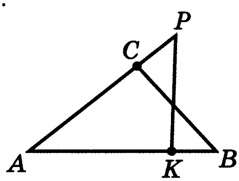
Рассмотрим $\triangle AE_2F$.



Найдем, какую часть от $S_{\triangle AE_2F}$ занимает $S_{AD_1F_1F}$.

Для этого воспользуемся теоремой: «Если угол одного треугольника равен углу другого треугольника, то площади этих треугольников относятся как произведения сторон, заключающих равные углы».

$$\boxed{\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle APK}} = \frac{AC \cdot AB}{AP \cdot AK}}$$ (см. рисунок).



Учитывая результаты теоремы для данной задачи, получим для $\triangle AE_2F$ и $\triangle D_1E_2F_1$:

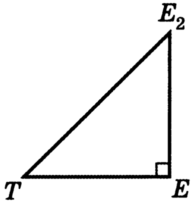
$$\frac{S_{\triangle AE_2F}}{S_{\triangle D_1E_2F_1}} = \frac{AE_2 \cdot FE_2}{D_1E_2 \cdot F_1E_2},$$

тогда $\dfrac{S_{\triangle AE_2F}}{S_{\triangle D_1E_2F_1}} = \dfrac{AE_2 \cdot FE_2}{\frac{3}{7}AE_2 \cdot \frac{3}{5}FE_2} = \dfrac{35}{9}$;

$$S_{\triangle D_1E_2F_1} = \frac{9}{35}S_{\triangle AE_2F}.$$

Значит $S_{AD_1F_1F} = \dfrac{26}{35}S_{\triangle AE_2F}$.

Рассмотрим $\triangle E_2ET$ (см. рис. с. 201).



$E_2T = \sqrt{EE_2^2 + ET^2}$;

$$E_2T = \sqrt{\left(\frac{49}{4}\right)^2 + \left(\frac{35}{13}\sqrt{13}\right)^2} =$$

$$= \frac{7}{4\cdot 13}\sqrt{7^2\cdot 13^2 + 20^2\cdot 13} = \frac{7}{52}\sqrt{13\cdot(49\cdot 13+40)} =$$

$$= \frac{7}{52}\sqrt{13\cdot(637+400)} = \frac{7}{52}\sqrt{13\cdot 1037}.$$

$$S_{\triangle AE_2F} = \frac{1}{2}AF\cdot E_2T,$$

т. е. $S_{\triangle AE_2F} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{39}\cdot\frac{7}{52}\sqrt{13\cdot 1037} = \frac{7}{4}\sqrt{3111}.$

$$S_{AD_1F_1F} = \frac{26}{35}\cdot\frac{7}{4}\sqrt{3111} = \frac{13}{10}\sqrt{3111},$$

т. е. $S_{\text{сеч}} = S_{AD_1F_1F} = 1{,}3\sqrt{3111}$ (кв. ед.).

Практикум 7 (Использование математического анализа в геометрии)

1. Стороны основания треугольной пирамиды равны 13, 14 и 15. Боковые *ребра* одинаково наклонены к плоскости основания под углом в 60°. В пирамиду вписана прямая треугольная призма, три вершины которой принадлежат боковым ребрам пирамиды. Найдите отношения площадей оснований пирамиды и призмы наибольшего объема.

Дано:

$SABC$ — пирамида

$AS = BS = CS$

$AB = 15,\ AC = 13,\ BC = 14$

$\left(\widehat{AS;ABC}\right) = \left(\widehat{BS;ABC}\right) =$

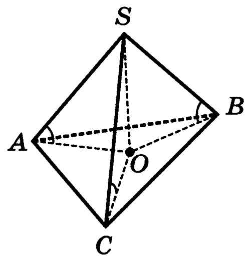
$= \left(\widehat{CS;ABC}\right) = 60°$

$A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — призма

$A_2B_2C_2 \subset ABC$;

$A_1 \in AC;\ B_1 \in BS;\ C_1 \in CS$

$V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = V_{\text{наиб}}$



Найдите $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}$.

а) $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$.

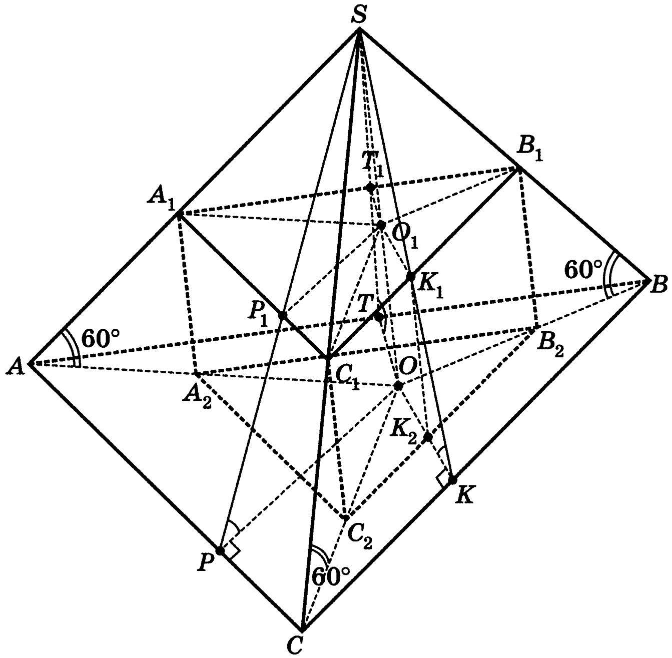
$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} =$

$= \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 3 \cdot 4 \cdot 7 = 84$.

б) Так как боковые ребра одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина пирамиды проецируется в центр *описанной* около основания окружности.

$R_{\text{о}} = \dfrac{abc}{4S}$, т. е. $R_{\text{о}} = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7} = \dfrac{65}{8}$.

в) $OS = H = OB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = \dfrac{65}{8}\sqrt{3}.$



г) Пусть $B_2B = x$.

$$\frac{SO}{OB} = \frac{B_1B_2}{B_2B}; \quad \frac{\frac{65}{8}\sqrt{3}}{\frac{65}{8}} = \frac{B_1B_2}{B_2B} = \sqrt{3};$$

$B_1B_2 = \sqrt{3}x.$

д) $$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = \left(\frac{OB}{OB_2}\right)^2 = \left(\frac{\frac{65}{8}}{\frac{65}{8} - x}\right)^2 = \left(\frac{65}{65 - 8x}\right)^2;$$

$$S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC}\left(\frac{65 - 8x}{65}\right)^2.$$

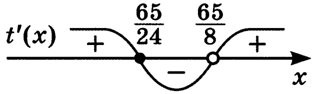
е) $V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = S_{\triangle A_2B_2C_2} \cdot B_1B_2,$

т. е. $V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC}\left(\dfrac{65 - 8x}{65}\right)^2 \cdot \sqrt{3}x.$

Пусть $t(x) = (65 - 8x)^2 x$; $\quad D(x):\ 0 < x < 8\frac{1}{8}$;

$t'(x) = -16(65 - 8x)x + (65 - 8x)^2 =$

$= (65 - 8x)(-16x + 65 - 8x) = (65 - 8x)(-24x + 65)$;



$V_{\max} = V_{\text{наиб}}$.

Итак, при $x_0 = \frac{65}{24}$ $\quad V(x_0) = V_{\text{наиб}}$.

ж) $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = \left(\dfrac{65}{65 - \frac{8\cdot 65}{24}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{9}{4}.$

2. Стороны основания треугольной пирамиды равны 13, 14 и 15. Боковые *грани* пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Площадь боковой поверхности в 2 раза больше площади основания. В пирамиду вписана прямая треугольная призма, три вершины которой скользят по боковым ребрам пирамиды. Найдите отношение площадей оснований пирамиды и призмы наибольшего объема.

Дано:

$SABC$ — пирамида

$S_б = 2S_{осн}$

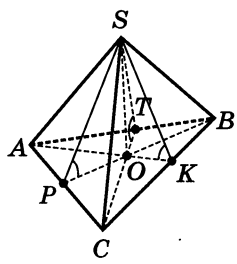
$AB = 15$, $AC = 13$, $BC = 14$

$\angle S\underline{AC}B = \angle S\underline{BA}C = \angle S\underline{CB}A$

$V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = V_{\text{наиб}}$,

где $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ — призма

$A_1 \in AS$; $B_1 \in BS$; $C_1 \in CS$



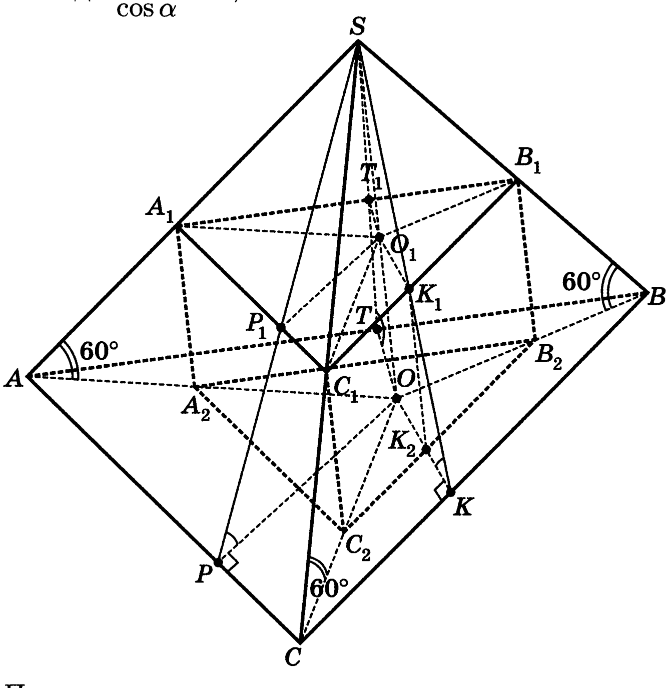
Найдите $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}}$.

а) $S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$
$\left(S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}\right).$

б) Так как боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то вершина проецируется в центр вписанной в основание окружности. Известно, что для таких пирамид
$\boxed{S_{б} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}}$, где $\alpha = \angle(S\underline{AC}B)$.
$r_{в} = \dfrac{S}{p}$; $r_{в} = 4$.

в) $S_{б} = \dfrac{S_{осн}}{\cos\alpha}$; $S_{б} = 2S_{осн}$.

Отсюда $\dfrac{1}{\cos\alpha} = 2$, т. е. $\alpha = 60°$.



По умолчанию предполагается, что читатель знает, как построить прямую призму $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$.

Построим $OK \perp BC$,

тогда так как $OS \perp ABC$, то $SK \perp BC$.

Значит $BC \perp SOK$, тогда $\rho(\angle S\underline{BC}A) = \rho(\angle SKO)$.

г) Пусть $K_2 \in OK$, $K_2 \in B_2C_2$.

Положим $K_2K = x$, тогда

$K_1K_2 = K_2K \cdot \operatorname{tg} 60°$; $\quad K_1K_2 = x\sqrt{3}$.

д) $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = \left(\dfrac{OK}{OK_2}\right)^2 = \left(\dfrac{4}{4-x}\right)^2$;

$S_{\triangle A_2B_2C_2} = S_{\triangle ABC}\left(\dfrac{4-x}{4}\right)^2$.

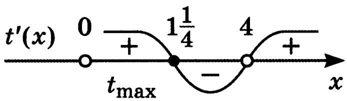
е) $V_{A_1B_1C_1A_2B_2C_2} = S_{\triangle A_2B_2C_2} \cdot K_1K_2 =$

$= S_{\triangle ABC} \cdot \left(\dfrac{4-x}{4}\right)^2 \sqrt{3}x$; $\quad x \in (0; 4)$.

Пусть $t(x) = (4-x)^2x$;

$t'(x) = -2(4-x)x + (4-x)^2 = (4-x)(-2x+4-x) =$

$= (4-x)(4-3x)$; $\quad t'(x) = 0$.



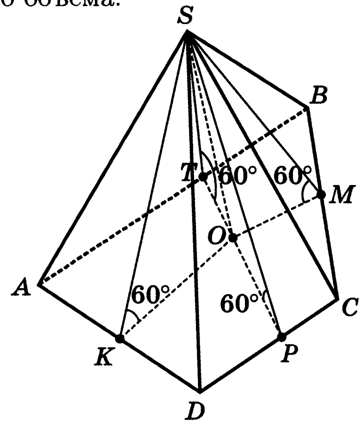
Значит $V_{\max} = V_{\text{наиб}} = V\left(1\dfrac{1}{3}\right)$,

т. е. при $x = 1\dfrac{1}{3}$ $\; V\left(1\dfrac{1}{3}\right) = V_{\text{наиб}}$.

ж) Так как $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = \left(\dfrac{4}{4-x}\right)^2$,

то $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_2B_2C_2}} = \left(\dfrac{4}{4-\frac{4}{3}}\right)^2 = \left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

3. В основании пирамиды лежит трапеция со сторонами в последовательном порядке равными 13, 7, 15. Двугранные углы при боковых гранях равны 60°. В пирамиду вписана прямая призма, вершины верхнего основания которой принадлежат боковым ребрам. Найдите отношение площадей оснований пирамиды и призмы наибольшего объема.



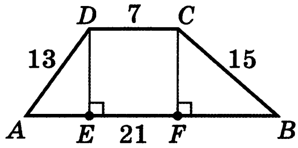
Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — трапеция
$AD = 13$; $DC = 7$; $BC = 15$
$\rho(\angle S\underline{AB}C) = \rho(\angle S\underline{BC}D) =$
$= \rho(\angle S\underline{CD}A) = \rho(\angle S\underline{DA}B) = 60°$
$A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — прямая призма
$A_1 \in AS$; $B_1 \in BS$;
$C_1 \in CS$; $D_1 \in DS$
$V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = V_{\text{наиб}}$

Найдите $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}}$.

1. Так как двугранные углы при основании равны между собой, то вершина S проецируется в центр вписанной окружности, значит, в трапецию можно вписать окружность.

Отсюда следует, что суммы противоположных сторон трапеции совпадают.



Тогда

$AB + DC = AD + BC;$

$13 + 15 = 7 + AB$, т. е. $AB = 21$.

2. Построим $DE \perp AB$; $CF \perp AB$.

   Пусть $AE = x$.

   Из $\triangle AED$: $DE^2 = AD^2 - AE^2 = 13^2 - x^2$;

   $FB = AB - AE - EF = 21 - x - 7 = 14 - x$.

   Из $\triangle BFC$: $CF^2 = CB^2 - FB^2 = 15^2 - (14 - x)^2$.

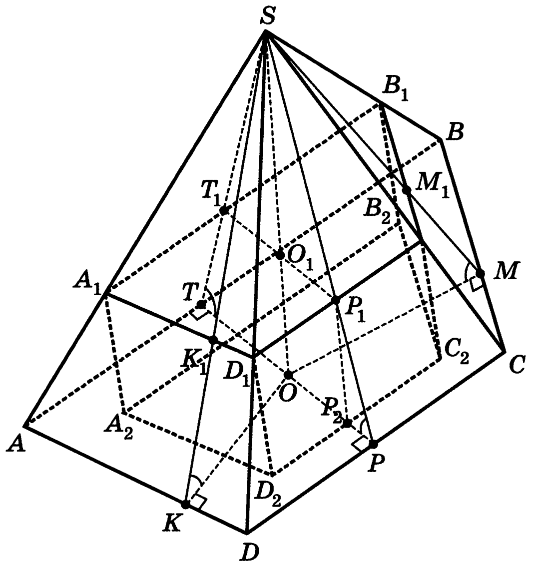
   Так как $DE = CF$,

   то $13^2 - x^2 = 15^2 - (14 - x)^2$; $28x = 140$,

   тогда $x = 5$.

3. $DE = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

   Отметим, что $DE = 2r_в$.



Сделаем доп. построение: $OP \perp DC$, проведем SP, значит $SP \perp DC$. Тогда так как $\angle SDCB = 60°$, то $\angle SPO = 60°$.

Очевидно, что в призме наибольшего объема, вписанной в пирамиду, основание $A_2B_2C_2D_2$ принадлежит $ABCD$.

4. Пусть $OP_2 = a$, тогда $P_2P = OP - a = 6 - a$.

   $H_{\text{призмы}} = P_2P_1 = P_2P \cdot \operatorname{tg} 60° = (6-a)\sqrt{3}$;

   $D(a) = (0; 6)$, где $D(a)$ — область определения функции, определяющей зависимости высоты призмы, а затем и ее объема от параметра a.

   Докажите, что $ABCD$ подобна $A_2B_2C_2D_2$.

5. $\dfrac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{ABCD}} = \left(\dfrac{OP_2}{OP}\right)^2 = \dfrac{a^2}{36}$.

   Учтем, что $OP = r_{\text{в}} = 6$;

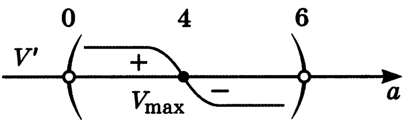
   $S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD} \cdot \dfrac{a^2}{36} \left(S_{ABCD} = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot DE;\right.$

   $\left. S_{ABCD} = \dfrac{21+7}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 14 \cdot 12 \cdot 6 = 168\right)$.

6. $V_{\text{пр}} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot P_1P_2$;

   $V_{\text{пр}} = \dfrac{168 \cdot a^2}{36} \cdot (6-a)\sqrt{3} = \dfrac{14}{3}\left(6a^2 - a^3\right)\sqrt{3}$;

   $V' = \dfrac{14}{3}\sqrt{3}\left(12a - 3a^2\right) = 14\sqrt{3}a(4-a)$;



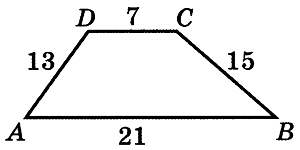
   $V_{\max} = V_{\text{наиб}} = V(4)$.

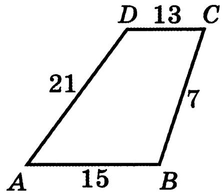
7. Так как $\dfrac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{ABCD}} = \dfrac{a^2}{36}$,

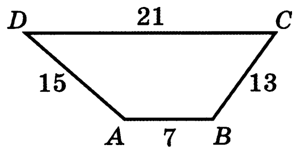
то $\dfrac{S_{A_2B_2C_2D_2}}{S_{ABCD}} = \dfrac{4^2}{36} = \dfrac{4}{9}$.

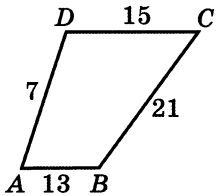
Ответ: $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \dfrac{9}{4}$.

Примечание. Трапеции со сторонами, в последовательном порядке равными 13, 7 и 15, могут быть только такими:

а) 

б) 

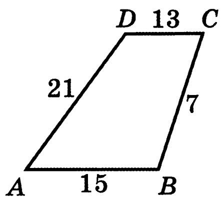
в) 

г) 

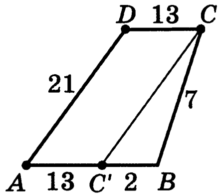
1. Трапеции вида а) и в) — существуют и равны, б) и г) — также равны, но не существуют.

2. Докажем, что трапеции вида б) не существует.

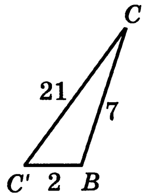
Действительно, рассмотрим трапецию вида б).



Проведем доп. построение:
$CC' \parallel AD$.
Тогда $CC' = AD = 21$
и $DC = AC' = 13$,
значит $C'B = 2$.
Получили $\triangle C'CB$.



По свойству треугольников
$C'B + BC > C'B$,
т. е. $2 + 7 > 21$ — ложь,
что и требовалось доказать.



Аналогичное доказательство можно провести и для случая г).

4. В основании пирамиды лежит трапеция со сторонами 7, 15 и 25. Углы между боковыми ребрами и плоскостью основания равны 60°. В пирамиду вписана прямая призма, вершины верхнего основания которой принадлежат боковым ребрам. Найдите отношение площадей оснований пирамиды и призмы наибольшего объема.

Вариант 1 (различные последовательности значений сторон трапеции)

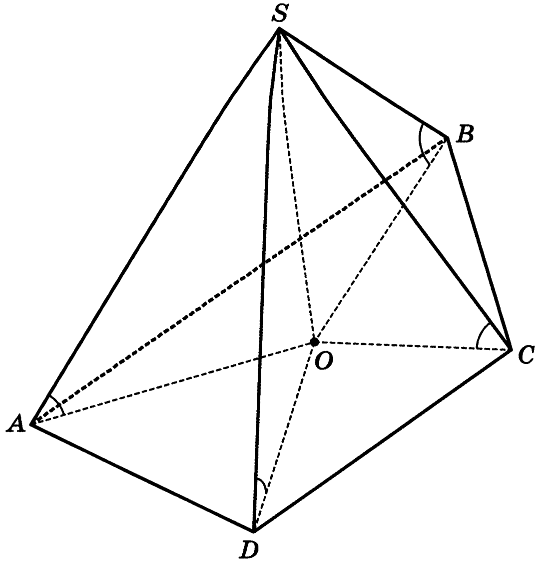
Дано:

$SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — трапеция
$DC = 7$; $BC = 15$; $AB = 25$
$\left(\widehat{SA; ABCD}\right) = \left(\widehat{SB; ABCD}\right) =$
$= \left(\widehat{SC; ABCD}\right) = \left(\widehat{SD; ABCD}\right) = 60°$
$A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — прямая призма
$A_1 \in AS$; $B_1 \in BS$; $C_1 \in CS$; $D_1 \in DS$
$V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = V_{\text{наиб}}$

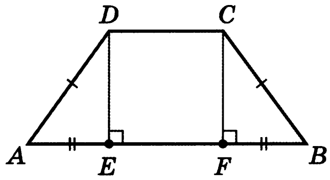
Найдите $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}}$.

а) Так как углы между боковыми ребрами и плоскостью основания равны между собой, то вершина S проецируется в центр описанной около трапеции окружности.

Значит $ABCD$ — равнобедренная трапеция. Тогда $AB = 25$; $DC = 7$; $BC = 15$ и $AD = 15$.



Так как в задаче необходимо вычислить отношение площадей оснований пирамиды и вписанной призмы наибольшего объема, то найдем площадь основания пирамиды. Построим $DE \perp AB$ и $CF \perp AB$.



1. $AE = \dfrac{AB - DC}{2}$; $\quad AE = 9$.

2. $DE = \sqrt{AD^2 - AE^2}$; $\quad DE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$.

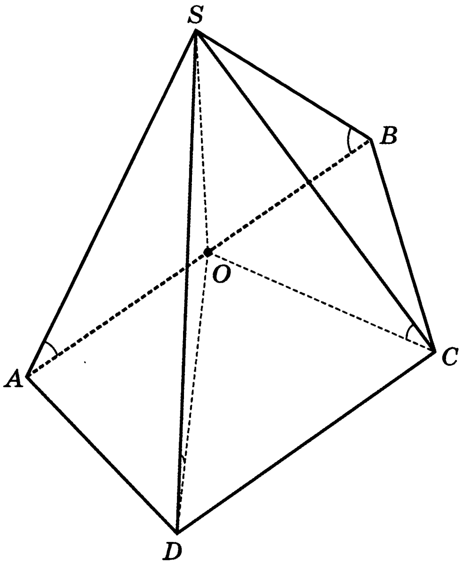
3. $EB = 25 - 9 = 16$; $\quad DB = \sqrt{DE^2 + EB^2}$;

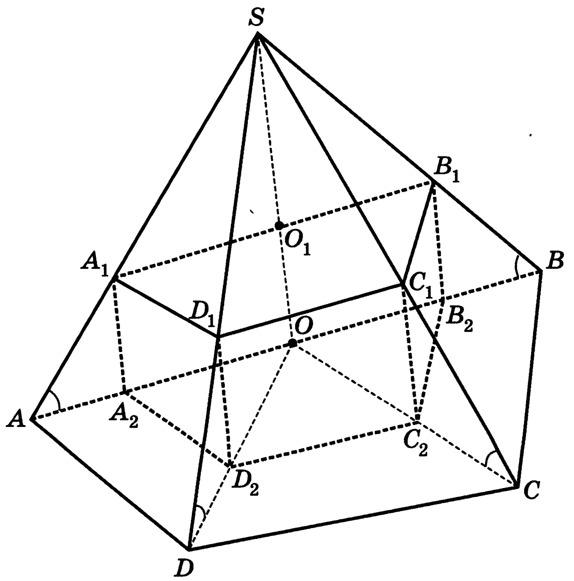
   $DB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$.

4. $S_{ABCD} = \dfrac{AB + DC}{2} DE$;

   $S_{ABCD} = \dfrac{25 + 7}{2} \cdot 12 = 32 \cdot 6 = 192$.

б) Рассмотрим $\triangle ADB$.
Так как $AD = 15$, $\quad DB = 20$, $\quad AB = 25$,
то $AB^2 = AD^2 + DB^2$. Значит $AD \perp DB$.
Тогда центр описанной окружности около $\triangle ADB$, а значит и около $ABCD$, лежит на середине AB.
$SO \perp ABC$; $\quad O \in AB$; $\quad AO = OB = 12,5$, тогда чертеж будет другой:





в) Пусть $OB_2 = x$, тогда $B_2B = 12{,}5 - x$,

значит $B_1B_2 = B_2B \cdot \operatorname{tg} 60^\circ$; $\quad B_1B_2 = (12{,}5 - x)\sqrt{3}$.

г) $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \left(\dfrac{OB}{OB_2}\right)^2 = \left(\dfrac{12{,}5}{x}\right)^2$,

следовательно, $S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD} \cdot \left(\dfrac{x}{12{,}5}\right)^2$.

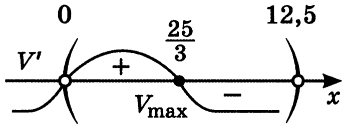
д) $V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = S_{A_2B_2C_2D_2} \cdot B_1B_2$;

$D(V) = (0; 12{,}5)$, где $D(V)$ — область определения функции объема.

$$V(x) = 192 \cdot \left(\frac{x}{12{,}5}\right)^2 (12{,}5 - x)\sqrt{3} =$$

$$= \frac{192\sqrt{3}}{(12{,}5)^2} \cdot x^2(12{,}5 - x);$$

$$V' = \frac{192\sqrt{3}}{(12{,}5)^2}(25x - 3x^2);$$

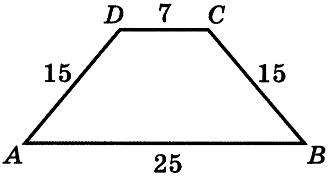


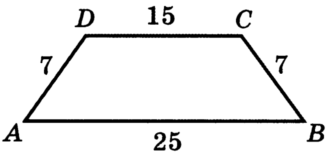
$$V_{max} = V_{наиб} = V\left(\frac{25}{3}\right) \quad \left(x = \frac{25}{3}\right).$$

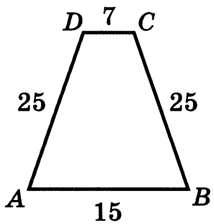
е) Так как $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \left(\dfrac{\frac{25}{2}}{x}\right)^2$,

то $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \left(\dfrac{\frac{25}{2}}{\frac{25}{3}}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$.

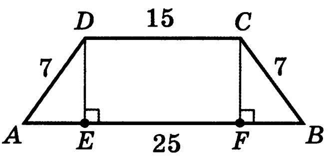
Примечание. Равнобедренных трапеций со сторонами, равными 7, 15 и 25, существует только 3 вида:

а) 

б) 

в) 

1. Случай а) был рассмотрен в первом варианте.
2. Рассмотрим случай б) ($AD = DC$ доказано в варианте 1 пункта а).



Пусть $DE \perp AB$; $CF \perp AB$.

$AE = \dfrac{AB - DC}{2}$, т. е. $AE = \dfrac{25 - 15}{2} = 5$.

$EB = 25 - 5 = 20$;

$DE = \sqrt{7^2 - 5^2} = 2\sqrt{6}$;

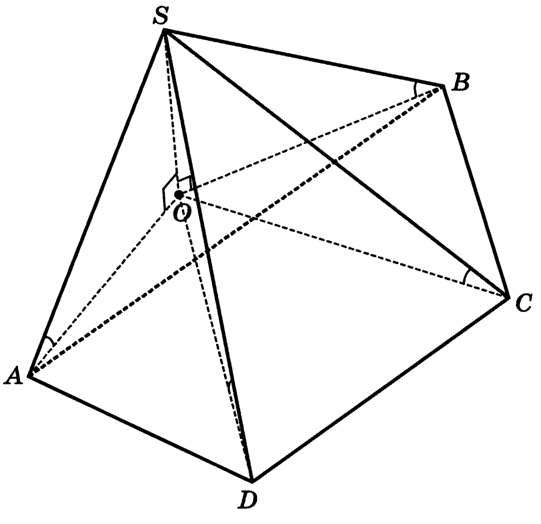
$DB = \sqrt{DE^2 + EB^2}$, т. е. $DB = \sqrt{24 + 400} = \sqrt{424}$.

Рассмотрим $\triangle ADB$.

$\cos(\angle ADB) = \dfrac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2 \cdot AD \cdot DB}$;

$\cos(\angle ADB) = \dfrac{49 + 424 - 625}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{424}} < 0$, т. е. $\angle ADB > 90°$.

Значит, центр описанной около $ABCD$ окружности находится вне $ABCD$. Тогда пирамида $SABCD$ будет иметь следующий вид:



Но в такую пирамиду вписать *прямую* призму, вершины верхнего основания которой принадлежат боковым ребрам, нельзя.

3. Для трапеции вида в) центр описанной окружности находится внутри трапеции $ABCD$, где $AB = 15$; $AD = 25$; $DC = 7$; $BC = 25$. Значит, существует второй вариант условия и решения задачи, рассмотрим его.

Вариант 2 (различные последовательности значений сторон трапеции)

Дано:

$SABCD$ — пирамида, $ABCD$ — трапеция

$DC = 7$; $BC = 25$; $AB = 15$;

$\rho\left(\widehat{SA; ABCD}\right) = \rho\left(\widehat{SB; ABCD}\right) =$

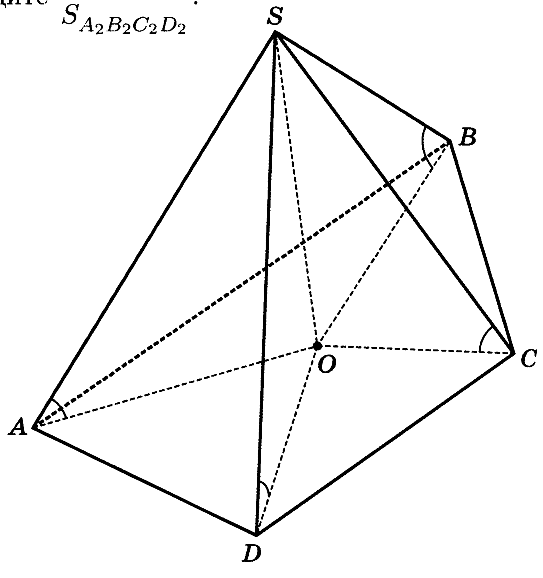
$= \rho\left(\widehat{SC; ABCD}\right) = \rho\left(\widehat{SD; ABCD}\right) = 60°$

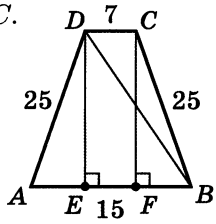
$A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ — прямая призма

$A_1 \in AS$; $B_1 \in BS$; $C_1 \in CS$; $D_1 \in DS$

$V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = V_{\text{наиб}}$

Найдите $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}}$.





а) Как было показано ранее, $AD = BC$.

Пусть $DE \perp AB$, $CF \perp AB$.

1. $AE = \dfrac{AB - DC}{2}$ т. е. $AE = 4$,

тогда $EB = 15 - 4 = 11$.

$DE = \sqrt{AD^2 - AE^2}$;

$DE = \sqrt{25^2 - 4^2} = \sqrt{609}$.

Тогда $\sin(\angle A) = \dfrac{DE}{AD}$, т. е. $\sin(\angle A) = \dfrac{\sqrt{609}}{25}$.

2. $DB = \sqrt{DE^2 + EB^2}$,

т. е. $DB = \sqrt{609 + 121} = \sqrt{730}$.

3. Рассмотрим $\triangle ADB$.

$\cos(\angle ADB) = \dfrac{AD^2 + DB^2 - AB^2}{2AD \cdot DB}$,

т. е. $\cos(\angle ADB) = \dfrac{625 + 730 - 225}{2 \cdot 25 \cdot \sqrt{730}} > 0$.

Следовательно, O (центр описанной окружности около $ABCD$) находится внутри $ABCD$.

4. $R_{\text{о } \triangle ADB} = \dfrac{DB}{2\sin(\angle A)}$ ($R_{\text{о } \triangle ADB} = R_{\text{о } ABCD} = AO$),

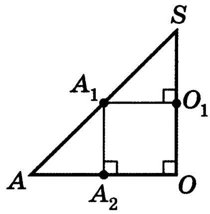
т. е. $R_{\text{о } \triangle ADB} = \dfrac{\sqrt{730}}{\frac{2\sqrt{609}}{25}} = \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} = R_{\text{о } ABCD}$.

б) $S_{ABCD} = \dfrac{AB + DC}{2} DE$,

т. е. $S_{ABCD} = \dfrac{15 + 7}{2}\sqrt{609} = 11\sqrt{609}$.

Рассмотрим $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$.

Учитывая, что боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, вершины нижнего основания призмы будут находиться на радиусах описанной окружности.



1. Рассмотрим $\triangle ASO$,
где $A_1A_2 \perp AO$ и $A_1O_1 \perp SO$.

Положим
$AA_2 = x \in \left(0; \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}\right)$.

Тогда $A_1A_2 = AA_2 \cdot \operatorname{tg}(\angle SAO)$

и $A_2O = A_1O_1 = AO - x$, т. е. $A_1O_1 = \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x$;

$A_1A_2 = x \operatorname{tg} 60^\circ = x\sqrt{3}$ — высота призмы

$A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$.

2. Так как $A_1B_1 \parallel AB$, $A_1D_1 \parallel AD$, ...,
то $A_2B_2 \parallel AB$; $A_2D_2 \parallel AD$, ...

3. Очевидно, что $\triangle AOD$ подобен $\triangle A_2OD_2 \ldots$, значит $ABCD$ подобна $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$ подобна $A_1B_1C_1D_1$.

Тогда $\dfrac{S_{\triangle ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = k^2$,

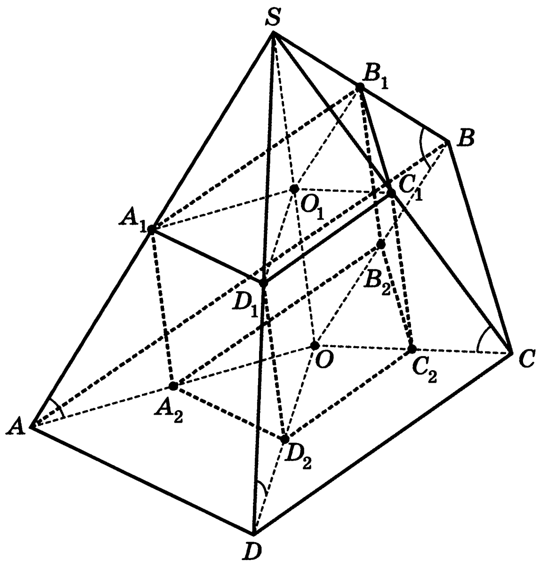
где $k = \dfrac{AD}{A_1D_1} = \dfrac{AS}{A_1S} = \dfrac{SO}{SO_1} = \dfrac{AO}{A_1O_1}$.

Следовательно,

$$k = \frac{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x}; \quad \frac{S_{\triangle ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} = \left(\frac{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x}\right)^2,$$

т. е. $$S_{A_2B_2C_2D_2} = S_{ABCD}\left(\frac{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x}{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}\right)^2.$$

в)



г) $V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = A_1A_2 \cdot S_{A_2B_2C_2D_2}$. Тогда

$$V_{A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2} = 11\sqrt{609}\left(\frac{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x}{\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}\right)^2 \cdot x\sqrt{3} =$$

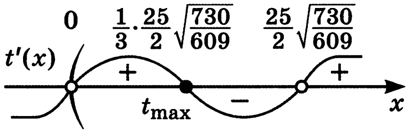
$$= \frac{11 \cdot 3\sqrt{203}}{\left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}\right)^2} \cdot x\left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x\right)^2.$$

Положим $t(x) = x\left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x\right)^2$; $x \in \left(0; \frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}\right)$.

$$t'(x) = \left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x\right)^2 + x \cdot 2\left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x\right) \cdot (-1) =$$

$$= \left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - x\right)\left(\frac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - 3x\right);$$

$$t'(x) = 0; \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} \\ x = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} \end{array}\right. .$$



Значит $V_{\text{наиб}} = V_{\max} = V\left(\dfrac{25\sqrt{730}}{6\sqrt{609}}\right)$,

т. е. $x = \dfrac{25\sqrt{730}}{6\sqrt{609}}$.

Следовательно, $\dfrac{S_{ABCD}}{S_{A_2B_2C_2D_2}} =$

$$= \left(\frac{\dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}{\dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}} - \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{25\sqrt{730}}{2\sqrt{609}}}\right)^2 = \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{9}{4}.$$

Примечания. 1. Как это ни удивительно, но во всех предыдущих четырех задачах ответ один и тот же. Обобщая полученные результаты, можно сформулировать следующее утверждение: если в n-угольную пирамиду вписать прямую n-угольную призму, вершины верхнего основания которой принадлежат боковым ребрам пирамиды, то отношение площади основания пирамиды к площади основания прямой призмы наибольшего объема, вписанной в пирамиду, всегда равно $\dfrac{9}{4}$ — весьма любопытный математический факт. Было бы здорово, если бы вам удалось это доказать.

2. Более подробно см. книгу А. Х. Шахмейстер. Введение в математический анализ. СПб.: «Петроглиф» — М.: МЦНМО, 2011.

Тренировочная работа 5 (Комбинации методов при решении задач)

Вариант 1

В основании прямой призмы лежит параллелограмм, сторона которого равна 4. Синус острого угла параллелограмма равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Отношение площадей сечений, проходящих через сторону нижнего основания и сторону верхнего основания, к площади основания призмы равно $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$. Найдите объем призмы.

Вариант 2

В прямом параллелепипеде наименьшая диагональ, равная 60, образует с гранями углы, косинусы которых равны $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ и $\frac{4}{5}$. Найдите объем параллелепипеда.

Вариант 3

В основании прямой призмы лежит трапеция с основаниями, равными 27 и 6, и боковыми сторонами, равными 17 и 10. Наименьшая диагональ призмы образует с гранью, проходящей через наименьшую боковую сторону трапеции, угол, синус которого равен 0,2. Найдите объем призмы.

Вариант 4

В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция. Диагональ призмы равна 3,25 и образует: с плоскостью основания угол α; с плоскостью наибольшей по площади боковой грани угол β; с плоскостью грани, проходящей через боковую сторону трапеции, угол γ. Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности, если синусы этих углов, соответственно, равны $\frac{12}{13}$, $\frac{7}{65}$ и $\frac{3}{13}$.

Решение тренировочной работы 5

Вариант 1

В основании прямой призмы лежит параллелограмм, сторона которого равна 4. Синус острого угла параллелограмма равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Отношение площадей разных сечений, проходящих через сторону нижнего основания и сторону верхнего основания, к площади основания призмы равно $\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{5}$. Найдите объем призмы.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед

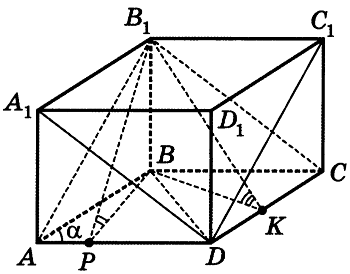
$AA_1 \perp ABCD$

$\frac{S_{AB_1C_1D}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{5}$

$\frac{S_{A_1B_1CD}}{S_{ABCD}} = \frac{3}{5}$

$AB = 4;\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.



а) 1. Так как $\frac{S_{ABCD}}{S_{AB_1C_1D}} = \frac{4}{5}$ и $\frac{S_{ABCD}}{S_{A_1B_1CD}} = \frac{3}{5}$, то по сути эти отношения равны косинусам двугранных углов $\angle B_1\underline{AD}C$ и $\angle A_1\underline{DC}B$ соответственно, т.е. $\cos(\angle B_1\underline{AD}C) = \frac{4}{5}$ и $\cos(\angle A_1\underline{DC}B) = \frac{3}{5}$.

2. Пусть $BP \perp AD$, тогда так как призма прямая, то $B_1P \perp AD$, следовательно $AD \perp (B_1PB)$.
Из $\triangle ABP$: $BP = AB\sin\alpha$, $BP = 4\sin\alpha$.
Так как $\cos(\angle B_1\underline{AD}C) = \frac{4}{5}$, то $\cos(\angle B_1PB) = \frac{4}{5}$.

$$\operatorname{tg}(\angle B_1PB) = \frac{\sqrt{1-\cos^2(B_1PB)}}{\cos(\angle B_1PB)},$$

т. е. $\operatorname{tg}(\angle B_1PB) = \dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{3}{4}$.

Значит $\underline{BB_1} = BP\operatorname{tg}(\angle B_1PB)$,

т. е. $BB_1 = 4\sin\alpha \cdot \dfrac{3}{4} = \underline{3\sin\alpha}$.

3. Пусть $BK \perp DC$, тогда $DC \perp B_1KB$.

Из $\triangle BKC$: $BK = BC\sin\alpha$. $BC = AD$.

Положим $BC = x$, т. е. $BK = x\sin\alpha$.

Так как $\cos(\angle A_1\underline{DC}B) = \dfrac{3}{5}$, то $\cos(\angle B_1KB) = \dfrac{3}{5}$;

$(B_1KB) \perp DC$, тогда $\operatorname{tg}(\angle B_1KB) = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2(B_1KB)}}{\cos(\angle B_1KB)}$,

т. е. $\operatorname{tg}(\angle B_1KB) = \dfrac{\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$.

Значит $BB_1 = BK\operatorname{tg}(\angle B_1KB)$,

т. е. $\underline{\underline{BB_1}} = x\sin\alpha \cdot \dfrac{4}{3} = \underline{\underline{\dfrac{4x}{3}\sin\alpha}}$.

4. $\left.\begin{array}{l} \underline{BB_1} = 3\sin\alpha \\ \underline{\underline{BB_1}} = \frac{4}{3}x\sin\alpha \end{array}\right|$, тогда $3 = \dfrac{4}{3}x$; $x = \dfrac{9}{4} = 2{,}25$.

б) 1. $S_{ABCD} = AB \cdot AD\sin\alpha$.

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4},$$

т. е. $S_{ABCD} = 4 \cdot \dfrac{9}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{4} = \dfrac{9}{4}\sqrt{13}$ (кв. ед.)

2. $BB_1 = 3\sin\alpha$, т. е. $BB_1 = 3 \cdot \dfrac{\sqrt{13}}{4} = \dfrac{3}{4}\sqrt{13}$.

3. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot BB_1$,

   т. е. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \dfrac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \dfrac{3}{4}\sqrt{13} = \dfrac{351}{16} = 21\dfrac{5}{8} =$

   $= \boxed{21{,}625}$ (куб. ед.).

Вариант 2

В прямом параллелепипеде наименьшая диагональ, равная 60, образует с гранями углы, косинусы которых равны $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{4}{5}$. Найдите объем параллелепипеда.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед, где

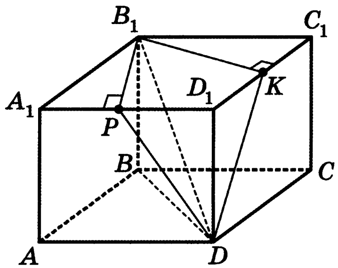
$AA_1 \perp ABCD$

$\cos\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right) = \dfrac{2}{3}$

$\cos\left(\widehat{DB_1; DD_1C_1C}\right) = \dfrac{3}{4}$

$\cos\left(\widehat{DB_1; AA_1D_1D}\right) = \dfrac{4}{5}$

$DB_1 = 60$



Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

а) $AA_1 \perp ABCD$, значит $BB_1 \perp ABCD$,

тогда $\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right) = \angle B_1DB$, где $\cos(\angle B_1DB) = \dfrac{2}{3}$.

Значит $DB = DB_1 \cos(\angle B_1DB)$, т. е. $DB = 60 \cdot \dfrac{2}{3} = 40$.

$BB_1 = DB_1 \sin(\angle B_1DB)$,

где $\sin(\angle B_1DB) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Значит $BB_1 = 60 \cdot \dfrac{\sqrt{5}}{3} = 20\sqrt{5}$.

б) Построим $B_1K \perp D_1C_1$.

Так как $CC_1 \perp ABCD$, то $CC_1 \perp B_1K$,

а значит $B_1K \perp DD_1C_1C$, т. е. $\left(\widehat{DB_1; DD_1C_1C}\right) = \angle B_1DK$,

причем $\cos(\angle B_1DK) = \dfrac{3}{4}$.

Тогда $DK = DB_1\cos(\angle B_1DK)$; $\quad B_1K = DB_1\sin(\angle B_1DK)$,

где $\sin(\angle B_1DK) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$,

т. е. $B_1K = 60 \cdot \dfrac{\sqrt{7}}{4} = 15\sqrt{7}$.

в) Построим $B_1P \perp A_1D_1$.

Так как $AA_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, то $AA_1 \perp B_1P$,

а значит $B_1P \perp AA_1D_1D$.

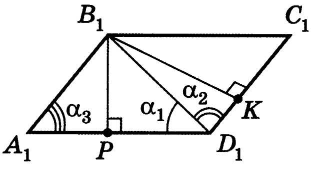
Тогда $\left(\widehat{DB_1; AA_1D_1D}\right) = \angle B_1DP$,

т. е. $B_1P = DB_1\sin(\angle B_1DP)$,

где $\sin(\angle B_1DP) = \sqrt{1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^2} = \dfrac{3}{5}$.

Таким образом $B_1P = 60 \cdot \dfrac{3}{5} = 36$.

г) Рассмотрим $A_1B_1C_1D_1$.



1. $\sin\alpha_1 = \sin(\angle B_1D_1P) = \dfrac{B_1P}{D_1B_1}$,

т. е. $\sin(\angle B_1D_1P) = \dfrac{36}{40} = \dfrac{9}{10} = \sin\alpha_1$;

2. $\sin\alpha_2 = \sin(\angle B_1D_1K) = \sin(\angle A_1B_1D_1) = \dfrac{B_1K}{D_1B_1}$,

т. е. $\sin\alpha_2 = \dfrac{15\sqrt{7}}{40} = \dfrac{3\sqrt{7}}{8}$.

3. $\alpha_3 = \angle B_1A_1D_1 = 180^\circ - \angle B_1D_1P - \angle B_1D_1K;$

$\alpha_3 = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_2;$

$\sin\alpha_3 = \sin(180^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2);$

$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1 = \sin\alpha_3;$

$\sin\alpha_1 = \frac{9}{10};\quad \cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{19}}{10};$

$\sin\alpha_2 = \frac{3\sqrt{7}}{8};\quad \cos\alpha_2 = \frac{1}{8};$

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3\sqrt{7}}{8}\cdot\frac{\sqrt{19}}{10} = \frac{9 + 3\sqrt{133}}{80} =$$

$$= \frac{3\left(3 + \sqrt{133}\right)}{80} = \sin\alpha_3.$$

4. $A_1B_1 = \dfrac{B_1P}{\sin\alpha_3},$

т. е. $A_1B_1 = \dfrac{36}{\frac{3(3+\sqrt{133})}{80}} = \dfrac{12\cdot 80}{3 + \sqrt{133}} = \dfrac{960}{3 + \sqrt{133}}.$

5. $S_{A_1B_1C_1D_1} = A_1B_1 \cdot B_1K,$

т. е. $S_{A_1B_1C_1D_1} = \dfrac{960}{3 + \sqrt{133}} \cdot 15\sqrt{7} =$

$$= \frac{960\left(\sqrt{133} - 3\right)\cdot 15\cdot\sqrt{7}}{133 - 9} = \frac{960\cdot 15\sqrt{7}\left(\sqrt{133} - 3\right)}{124} =$$

$$= \frac{240\cdot 15\sqrt{7}\left(\sqrt{133} - 3\right)}{31} = \frac{360\left(7\sqrt{19} - 3\sqrt{7}\right)}{31}.$$

д) $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot BB_1;$

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \frac{360\left(7\sqrt{19} - 3\sqrt{7}\right)}{31}\cdot 20\sqrt{5} =$$

$$= \frac{7200\left(7\sqrt{95} - 3\sqrt{35}\right)}{31}\ \text{(куб. ед.)}.$$

Вариант 3

В основании прямой призмы лежит трапеция с основаниями, равными 27 и 6, и боковыми сторонами, равными 17 и 10. Наименьшая диагональ призмы образует с гранью, проходящей через наименьшую боковую сторону трапеции, угол, синус которого равен 0,2. Найдите объем призмы.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма

$AA_1 \perp ABCD$

$\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1B_1B}\right) = 0{,}2$

$AD \parallel BC$

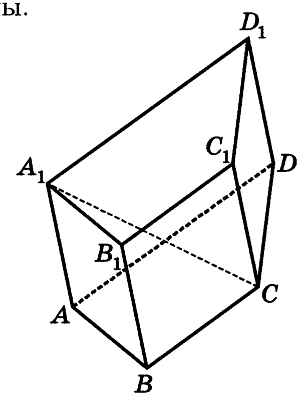
$AD = 27$

$BC = 6$

$AB = 10$

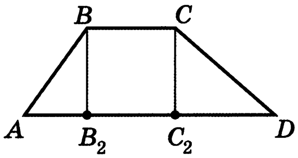
$DC = 17$

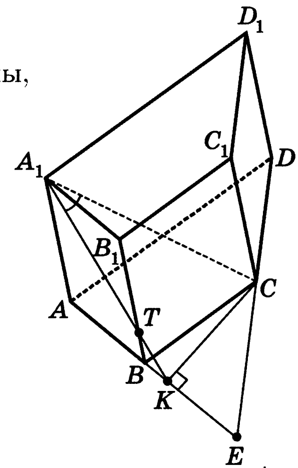
Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.



а) 1. Очевидно, что A_1C — наименьшая диагональ призмы, так как $AC < BD$.

2. Рассмотрим трапецию





Пусть $BB_2 \perp AD$; $CC_2 \perp AD$. Ясно, что тогда $BC = B_2C_2 = 6$.

Положим $AB_2 = x$, тогда

$BB_2^2 = AB^2 - AB_2^2$, т. е. $\underline{\underline{BB_2^2}} = 10^2 - x^2$.

$DC_2 = AD - AB_2 - B_2C_2 = 27 - x - 6 = 21 - x,$

тогда $\underline{\underline{CC_2^2}} = 17^2 - (21 - x)^2 \quad (BB_2 = CC_2);$

$10^2 - x^2 = 17^2 - (21 - x)^2; \quad 42x = 10^2 - 17^2 + 21^2;$

$x = \dfrac{252}{42} = \dfrac{126}{21} = \dfrac{42}{7} = 6,$

т. е. $AB_2 = 6$, а $DC_2 = 15$. Тогда $BB_2 = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$

3. $\sin(\angle A) = \dfrac{BB_2}{AB},$

т. е. $\sin(\angle A) = \dfrac{4}{5}; \quad \sin(\angle D) = \dfrac{CC_2}{CD}$, тогда $\sin(\angle D) = \dfrac{8}{17}.$

б) 1. Пусть $CK \perp AB$ (или его продолжению).

Так как $AA_1 \perp ABCD$, то $AA_1 \perp CK$,

значит $CK \perp AA_1B_1B$.

Тогда $\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1B_1B}\right) = \sin(\angle CA_1K) = 0{,}2.$

2. Из $\triangle CBK$:

$CK = BC\sin(\angle A) \quad (\angle A = \angle CBK, \;\; AD \parallel BC);$

$CK = 6 \cdot \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{5} = 4{,}8.$

Значит из $\triangle A_1CK$:

$A_1C = \dfrac{CK}{\sin(\angle CA_1K)}$, т. е. $A_1C = \dfrac{4{,}8}{0{,}2} = 24.$

в) 1. Из трапеции $ABCD$:

$AC_2 = AB_2 + B_2C_2$, т. е. $AC_2 = 12.$

2. Из $\triangle ACC_2$:

$AC = \sqrt{AC_2^2 + CC_2^2},$

т. е. $AC = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{3^2 + 2^2} = 4\sqrt{13}.$

3. Из $\triangle A_1AC$:

$AA_1 = \sqrt{A_1C^2 - AC^2}$,

т. е. $AA_1 = \sqrt{24^2 - \left(4\sqrt{13}\right)^2} = \sqrt{576 - 208} =$

$= \sqrt{368} = 2\sqrt{92} = 4\sqrt{23}$.

4. $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} BB_2$, т. е. $S_{ABCD} = \dfrac{27 + 6}{2} \cdot 8 = 132$.

5. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \cdot AA_1$;

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 132 \cdot 4\sqrt{23} = \boxed{528\sqrt{23}}$ (куб. ед.).

Вариант 4

В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция. Диагональ призмы равна 3,25 и образует: с плоскостью основания угол α; с плоскостью наибольшей по площади боковой грани угол β; с плоскостью грани, проходящей через боковую сторону трапеции, угол γ. Найдите объем призмы и площадь ее боковой поверхности, если синусы этих углов, соответственно, равны $\dfrac{12}{13}$, $\dfrac{7}{65}$ и $\dfrac{3}{13}$.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямая призма

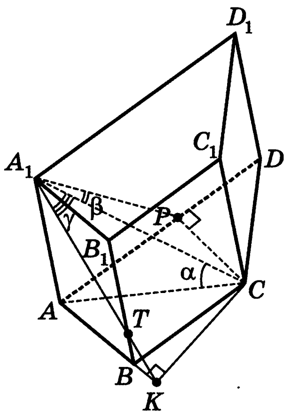
$ABCD$ — равнобедренная трапеция

$A_1C = 3{,}25$

$\sin\left(\widehat{A_1C; ABCD}\right) = \sin\alpha = \dfrac{12}{13}$

$\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1D_1D}\right) = \sin\beta = \dfrac{7}{65}$

$\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1B_1B}\right) = \sin\gamma = \dfrac{3}{13}$



Найдите:

а) $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$;

б) $S_{\text{б. п.}\ ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

а) Найдем $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

1. $AA_1 \perp ABCD$ по условию.

   Тогда $\left(\widehat{A_1C; ABCD}\right) = \angle A_1CA = \alpha$.

   Значит $AC = A_1C\cos\alpha$; $\quad AA_1 = A_1C\sin\alpha$,

   где $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$; $\quad \cos\alpha = \sqrt{1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = \dfrac{5}{13}$.

   Тогда $AC = 3{,}25 \cdot \dfrac{5}{13} = \dfrac{5}{4}$ и $AA_1 = 3{,}25 \cdot \dfrac{12}{13} = 3$.

2. Построим $CP \perp AD$.

   Так как $AA_1 \perp ABCD$, то $AA_1 \perp CP$,

   а значит $CP \perp AA_1D_1D$.

   Тогда $\left(\widehat{A_1C; AA_1D_1D}\right) = \angle CA_1P = \beta$,

   т. е. $\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1D_1D}\right) = \sin\beta = \dfrac{7}{65}$.

3. Из $\triangle A_1CP$ следует, что $CP = A_1C \cdot \sin\beta$,

   т. е. $CP = 3{,}25 \cdot \dfrac{7}{65} = \dfrac{7}{20}$.

4. Построим $CK \perp AB$.

   Так как $AA_1 \perp ABCD$, то $AA_1 \perp CK$,

   значит $CK \perp AA_1B_1B$.

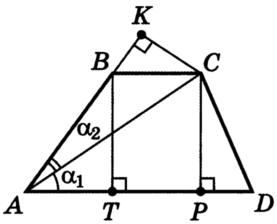
   Тогда $\left(\widehat{A_1C; AA_1B_1B}\right) = \angle CA_1K = \gamma$,

   т. е. $\sin\left(\widehat{A_1C; AA_1B_1B}\right) = \sin\gamma = \dfrac{3}{13}$.

5. Из $\triangle A_1CK$ следует, что $CK = A_1C \cdot \sin\gamma$,

   т. е. $CK = 3{,}25 \cdot \dfrac{3}{13} = \dfrac{3}{4}$.

6. Рассмотрим $ABCD$ $(AB = DC)$.



$\sin\alpha_1 = \dfrac{CP}{AC}$,

т. е. $\sin\alpha_1 = \dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{7}{25}$,

тогда $\cos\alpha_1 = \dfrac{24}{25}$.

$\sin\alpha_2 = \dfrac{CK}{AC}$, т. е. $\sin\alpha_2 = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{3}{5}$, тогда $\cos\alpha_2 = \dfrac{4}{5}$.

$\angle A = \alpha_1 + \alpha_2$;

$\sin(\angle A) = \sin(\alpha_1 + \alpha_2) = \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_2\cos\alpha_1$,

т. е. $\sin(\angle A) = \dfrac{7}{25}\cdot\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{24}{25} = \dfrac{100}{125} = \dfrac{4}{5}$; $\cos(\angle A) = \dfrac{3}{5}$.

7. Из $\triangle ABT$: $AB = \dfrac{BT}{\sin(\angle A)}$, т. е. $AB = \dfrac{\frac{7}{20}}{\frac{4}{5}} = \dfrac{7}{16}$.

8. Из $\triangle ACP$: $AP = AC\cos\alpha_1$, т. е. $AP = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{24}{25} = \dfrac{6}{5}$.

9. Так как $PD = AT$, то $AP = AT + TP = TP + PD$, где $TP = BC$, $AT = AD - BC$.

Значит AP численно равно средней линии $ABCD$ $\left(AP = \dfrac{AD + BC}{2}\right)$.

$S_{ABCD} = AP\cdot CP$,

т. е. $S_{ABCD} = \dfrac{6}{5}\cdot\dfrac{7}{20} = \dfrac{42}{100} = 0{,}42$ (кв. ед.).

10. $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}\cdot AA_1$;

$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 0{,}42\cdot 3 = \boxed{1{,}26}$ (куб. ед.).

б) Найдем $S_{\text{б. п. } ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

$S_{\text{б. н. } ABCDA_1B_1C_1D_1} = P_{ABCD} \cdot AA_1$;

1. $P_{ABCD} = 2(AB + AP)$ (докажите),

   т. е. $P_{ABCD} = 2\left(\dfrac{7}{16} + \dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{131}{40}$.

2. $S_{\text{б. п. } ABCDA_1B_1C_1D_1} = \dfrac{131}{40} \cdot 3 = \dfrac{393}{40} = 9\dfrac{33}{40} = 9{,}825$.

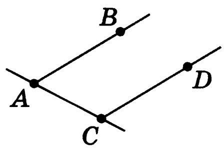
   Итак, $S_{\text{б. п. } ABCDA_1B_1C_1D_1} = \boxed{9{,}825}$ (кв. ед.).

2

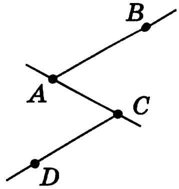
Векторы

Основные определения и свойства

<u>Определение 1.</u> **Два луча $[AB)$ и $[CD)$ называются сонаправленными, если они принадлежат параллельным прямым и лежат в одной полуплоскости относительно прямой, соединяющей их начала: $[AB) \uparrow\uparrow [CD)$.**

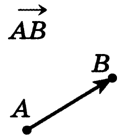


<u>Определение 2.</u> **Два луча $[AB)$ и $[CD)$ называются противоположно направленными, если они принадлежат параллельным прямым и лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, соединяющей их начала: $[AB) \uparrow\downarrow [CD)$.**



Определение 3. Множество всех сонаправленных лучей называется направлением.

Определение 4 (геометрическая интерпретация). Вектором называется направленный отрезок.



Примечания

1. Направленный отрезок значит отрезок, принадлежащий направлению — множеству всех сонаправленных лучей.
2. Вектор обозначается $\vec{a}$ или $\overrightarrow{AB}$, где точка A — начало, а точка B — конец вектора, а $\overrightarrow{AB} \subset [AB)$.
3. Вектор характеризуется длиной отрезка AB, модулем вектора называется $AB = |\overrightarrow{AB}|$.

Определение 5. Вектор называется нулевым, если его длина равна нулю ($\vec{a} = \vec{0}$, если $|\vec{a}| = 0$). Нулевой вектор направления не имеет.

Определение 6. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными ($\vec{a} = \vec{b}$), если лучи, содержащие эти векторы, сонаправлены ($\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) и длины векторов равны ($|\vec{a}| = |\vec{b}|$).

Умножение вектора на число

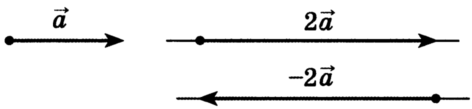
Определение 7. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ (λ — число, не равное нулю), для которого:

1. $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$, если $\lambda > 0$ (векторы принадлежат сонаправленным лучам);
   $\vec{b} \uparrow\downarrow \vec{a}$, если $\lambda < 0$ (векторы принадлежат противоположно направленным лучам).
2. $|\vec{b}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$, причем
   если $|\lambda| > 1$, то происходит растяжение длины вектора $\vec{a}$ в $|\lambda|$ раз;
   если $|\lambda| < 1$ ($\lambda \neq 0$) то происходит сжатие длины вектора $\vec{a}$ в $\dfrac{1}{|\lambda|}$ раз.

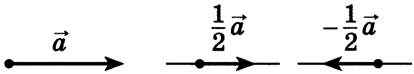
Свойства умножения вектора на число

1. Ассоциативность (сочетательный закон): $(\lambda_1 \cdot \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot (\lambda_2 \cdot \vec{a})$.
2. Дистрибутивность умножения векторов на число λ относительно сложения векторов: $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$.
3. Дистрибутивность умножения вектора на число λ относительно сложения чисел: $(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$.

Пример 1.



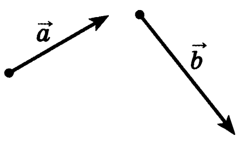
Пример 2.



Пример 3. $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

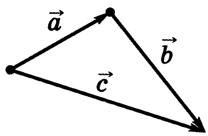
Сумма двух векторов

Определение 8 (Правило треугольника для сложения двух векторов). Для того чтобы сложить два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, необходимо:



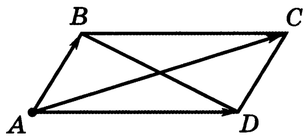
а) параллельным переносом совместить начало вектора $\vec{b}$ с концом вектора $\vec{a}$;

б) соединив начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$, получим вектор $\vec{c}$, который назовем суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$.

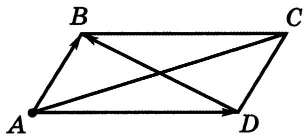


Напомним правило сложения и вычитания двух векторов с общим началом (правило параллелограмма).

Пусть $ABCD$ — параллелограмм.



а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ — диагональ, исходящая из общего начала векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$ — диагональ, соединяющая концы векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, причем направленное к тому вектору, из которого вычитаем.

Так как у них общее начало, то в записи результирующего вектора будут конечные буквы векторов разности, взятые в обратном порядке.

Примечание. Сумма или разность векторов обобщенно называются алгебраической суммой этих векторов. В дальнейшем, говоря об алгебраической сумме векторов, мы будем по умолчанию подразумевать или их сумму, или их разность, или комбинацию того и другого.

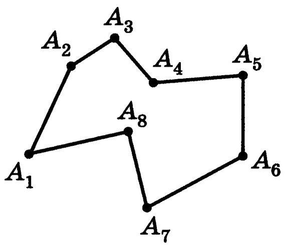
Свойства сложения векторов

1. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
2. Коммутативность: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
3. Ассоциативность относительно сложения чисел: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Примечание. Отметим, что для любого многоугольника верно следующее утверждение: если каждая сторона многоугольника является вектором, начало которого есть конец вектора, образованного из предыдущей стороны, то сумма всех этих векторов равна нулевому вектору.

$\overrightarrow{A_1A_1}+\overrightarrow{A_2A_3}+\ldots+\overrightarrow{A_{n-1}A_n}+\overrightarrow{A_nA_1}=\vec{0}$.

Например, для восьмиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$:



$$\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_6A_7}+\overrightarrow{A_7A_8}+\overrightarrow{A_8A_1}=\vec{0}.$$

Историческая справка

Каспер Вессель (1745–1818) — датский математик. В работе «Об аналитическом представлении направлений» (1799 г.), посвященной теории векторов на плоскости и в пространстве он впервые дал полное геометрическое построение теории комплексных чисел, рассматриваемых как векторы плоскости. Идеи, содержащиеся в книге, позднее развились в теории кватернионов. К сожалению, работа была написана на датском языке и стала известна только через 100 лет, благодаря Ж. Аргану и К. Гауссу.

Жан Робер Арган (1768–1822) — швейцарский математик. Независимо от К. Весселя в сочинении 1806 г. «Эссе о методе представления мнимых величин» дал геометрическую интерпретацию комплексных чисел на плоскости. В этой же работе дано отличное от гауссовского доказательство основной теоремы алгебры. В 1814–1815 гг. им был введен термин *модуль комплексного числа.*

Уильям Роуэн Гамильтон (1805–1865) — ирландский математик. В работах 1845 г. ввел термины *скаляр, скалярное произведение, векторное произведение.* Над теорией кватернионов трудился восемь лет.

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855) — гениальный немецкий математик из Брауншвейга. В алгебре Гаусса занимала преимущественно основная теорема алгебры, к которой он неоднократно возвращался и дал не менее шести различных доказательств в работах 1803–1817 гг. В современной редакции она формулируется так: «Любое уравнение n-й степени с действительными коэффициентами имеет ровно n корней, включая кратные и компле́ксные». Более того, корни уравнения вида $x^n - 1 = 0$ можно представить на компле́ксной плоскости как координаты вершин правильного n-угольника с центром в начале координат[5]. В этих же работах даются также указания относительно кубических и биквадратных вычетов. Теоремы о биквадратных вычетах 1825–1831 гг. чрезвычайно расширяют область теории чисел, благодаря введению так называемых *целых гауссовых чисел*, т.е. чисел вида $a + bi$, где a и b — целые числа.

Герман Грасман (1809–1877) — немецкий математик. В «Учении о линейном пространстве» дал первое систематическое построение учения о многомерном евклидовом пространстве, ввел скалярное произведение векторов. Независимо от У. Гамильтона Грасман построил теорию гиперкомплексных чисел. Позднее Д. Гильберт развил его идеи в области формалистики в математике — целостной философской концепции, обосновывающей современную математику.

Уильям Клиффорд (1845–1879) — английский математик. Сумел объединить два подхода в рамках общей теории, включающей в себя и обычное векторное исчисление.

Джозайн Уиллард Гиббс (1839–1903) — американский математик и физик. Окончательно обобщил все идеи и в 1901 г. опубликовал обширный и исчерпывающий труд — учебник по векторному анализу.

---

[5] Более подробно см. книгу А. Х. Шахмейстер Комплексные числа. СПб.: «Петроглиф». М.: МЦНМО, 2011 г.

Практикум 8 (Алгебраическая сумма векторов)

1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Найдите алгебраическую сумму векторов:

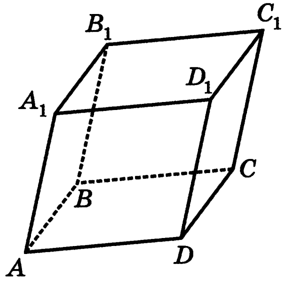
а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$;

б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

в) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}$;

г) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$;

д) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}$.



Решение

а) $\underline{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}-\overrightarrow{AA_1}=\underline{\overrightarrow{AC}}-\overrightarrow{AA_1}=\boxed{\overrightarrow{A_1C}}$.

б) $\underline{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{AA_1}=\underline{\overrightarrow{DB}}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BB_1}=\boxed{\overrightarrow{DB_1}}$ $\left(\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}\right)$.

в) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DD_1}=\boxed{\overrightarrow{BD_1}}$ $\left(\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}\right)$.

г) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DD_1}=\boxed{\overrightarrow{D_1B}}$.

д) $-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BB_1}=\boxed{\overrightarrow{B_1D}}$.

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выразите данную алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть вершины куба.

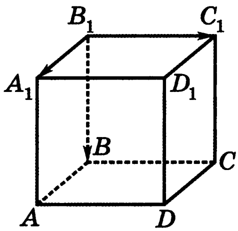
а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$;

б) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$;

в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;

г) $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$;

д) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.



Обозначим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$, где точка B — общее начало данных векторов.

Решение

а) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{B_1C_1} =$
$= \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AD} = \boxed{\overrightarrow{B_1D}}$ $\left(\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{AD}\right)$.

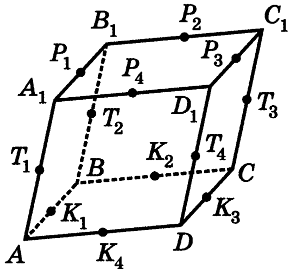
б) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{B_1A_1} - \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{B_1C_1} =$
$= \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{A_1D_1} = \boxed{\overrightarrow{BD_1}}$ $\left(\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1}\right)$.

в) $\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{C_1B} =$
$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1B} = \boxed{\overrightarrow{C_1A}}$ $\left(\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{B_1A_1}\right)$.

г) $-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c} = -\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} - \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1B} - \overrightarrow{B_1C_1} =$
$= \overrightarrow{A_1B} - \overrightarrow{A_1D_1} = \boxed{\overrightarrow{D_1B}}$ $\left(\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1}\right)$.

д) $-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = -\overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1C_1} =$
$= \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BC} = \boxed{\overrightarrow{A_1C}}$ $\left(\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}\right)$.

3. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Пусть $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$ — базисные векторы. Базисными называются векторы, которые с точностью до параллельного переноса не принадлежат одной плоскости. В данном случае они имеют общее начало в вершине A.

Выразите заданные векторы через базисные ($\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$):

а) $\overrightarrow{K_3T_1}$; б) $\overrightarrow{DP_1}$; в) $\overrightarrow{P_2K_3}$; г) $\overrightarrow{A_1K_2}$; д) $\overrightarrow{T_4K_1}$.

Докажите, что:

е) $\overrightarrow{P_2K_3} = \overrightarrow{P_1K_4}$; ж) $\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_4P_3}$; з) $\overrightarrow{P_1T_3} = \overrightarrow{T_1K_3}$;

и) $\overrightarrow{K_1C_1} = \overrightarrow{AP_3}$; к) $2\overrightarrow{T_2P_2} = \overrightarrow{K_1P_3}$.

Решение

а) Для того чтобы выразить вектор $\overrightarrow{K_3T_1}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, необходимо найти ломаную с началом в точке K_3 и концом в точке T_1, причем звенья ломаной должны принадлежать ребрам параллелепипеда.

$$\overrightarrow{K_3T_1} = \overrightarrow{K_3D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AT_1} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\left(\overrightarrow{K_3D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}\vec{b};\ \overrightarrow{DA} = -\vec{c};\ \overrightarrow{AT_1} = \frac{1}{2}\vec{a}\right).$$

б) $$\overrightarrow{DP_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} = -\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\left(\overrightarrow{A_1P_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB_1} = \frac{1}{2}\vec{b}\right).$$

в) $$\overrightarrow{P_2K_3} = \overrightarrow{P_2C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CK_3} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\left(\overrightarrow{P_2C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c}\right).$$

г) $$\overrightarrow{A_1K_2} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BK_2} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\left(\overrightarrow{BK_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\vec{c}\right).$$

д) $$\overrightarrow{T_4K_1} = \overrightarrow{T_4D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AK_1} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\left(\overrightarrow{T_4D} = \frac{1}{2}\overrightarrow{D_1D} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{DD_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} = -\frac{1}{2}\vec{a}\right).$$

е) Докажем, что $\overrightarrow{P_2K_3} = \overrightarrow{P_1K_4}$.

$$\overrightarrow{P_2K_3} = \overrightarrow{P_2C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CK_3} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{P_1K_4} = \overrightarrow{P_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AK_4} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c},$$

значит $\overrightarrow{P_2K_3} = \overrightarrow{P_1K_4}$.

ж) Докажем, что $\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_4P_3}$.

$$\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_1B} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1P_2} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c};$$

$$\overrightarrow{K_4P_3} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1P_3} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

значит $\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_4P_3}$.

з) Докажем, что $\overrightarrow{P_1T_3} = \overrightarrow{T_1K_3}$.

$$\overrightarrow{P_1T_3} = \overrightarrow{P_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{C_1T_3} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{T_1K_3} = \overrightarrow{T_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b},$$

значит $\overrightarrow{P_1T_3} = \overrightarrow{T_1K_3}$.

и) Докажем, что $\overrightarrow{K_1C_1} = \overrightarrow{AP_3}$.

$$\overrightarrow{K_1C_1} = \overrightarrow{K_1B} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1C_1} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \vec{c} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b};$$

$$\overrightarrow{AP_3} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1P_3} = \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

значит $\overrightarrow{K_1C_1} = \overrightarrow{AP_3}$.

к) Докажем, что $2\overrightarrow{T_2P_2} = \overrightarrow{K_1P_3}$.

$$2\overrightarrow{T_2P_2} = 2\left(\overrightarrow{T_2B_1} + \overrightarrow{B_1P_2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = \vec{a} + \vec{c};$$

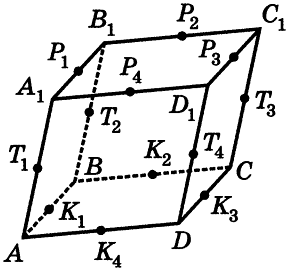
$$\overrightarrow{K_1P_3} = \overrightarrow{K_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1P_3} = -\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \vec{c} + \vec{a},$$

значит $2\overrightarrow{T_2P_2} = \overrightarrow{K_1P_3}$.

Тренировочная работа 6 (Алгебраическая сумма векторов)

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.
Базисные векторы: $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.



1. Выразите данную алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или точки, данные на ребрах параллелепипеда:

а) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; б) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;
г) $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; д) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$.

2. Выразите через базисные векторы:

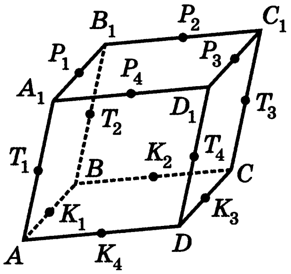
а) $\overrightarrow{DP_1}$; б) $\overrightarrow{A_1K_3}$; в) $\overrightarrow{K_4T_3}$; г) $\overrightarrow{P_3B}$; д) $\overrightarrow{T_1P_2}$.

3. Выясните, справедливы ли равенства:

а) $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$; б) $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$.

Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.
Базисные векторы: $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.



1. Выразите данную алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или точки, данные на ребрах параллелепипеда:

а) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$; б) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$; в) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

г) $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$; д) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$.

2. Выразите через базисные векторы:

а) $\overrightarrow{DP_1}$; б) $\overrightarrow{A_1K_3}$; в) $\overrightarrow{K_4T_3}$; г) $\overrightarrow{P_3B}$; д) $\overrightarrow{T_1P_2}$.

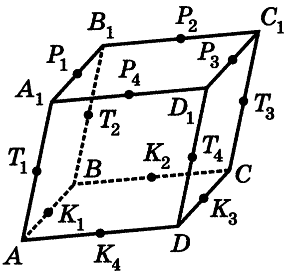
3. Выясните, справедливы ли равенства:

а) $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$; б) $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$.

Решение тренировочной работы 6

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.
Базисные вектора: $\overrightarrow{BB_1} = \vec{b}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$.



1. Выразите данную алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или точки, данные на ребрах параллелепипеда:

а) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B_1D}$.

б) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = -\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB_1} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB_1}$.

в) $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BK_1} + \overrightarrow{CB_1} =$
$= \overrightarrow{B_1P_1} + \overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CP_1}$.

г) $\vec{a} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BB_1} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BK_2} = \overrightarrow{K_2A_1}$.

д) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BT_2} =$
$= \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CT_3} = \overrightarrow{T_3A}$.

2. Выразите через базисные векторы:

а) $\overrightarrow{DP_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} = -\vec{c} + \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

б) $\overrightarrow{A_1K_3} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK_3} = -\vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

в) $\overrightarrow{K_4T_3} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CT_3} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

г) $\overrightarrow{P_3B} = \overrightarrow{P_3C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$.

д) $\overrightarrow{T_1P_2} = \overrightarrow{T_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1P_2} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

3. Выясните, справедливы ли равенства:

а) $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$.

$\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_2B_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BK_1} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a}$;

$\overrightarrow{P_3K_4} = \overrightarrow{P_3D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DK_4} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$,

значит $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$ — верное равенство.

б) $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$.

$\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CK_2} = -\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{P_4B} = \overrightarrow{P_4A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} - \vec{b}$,

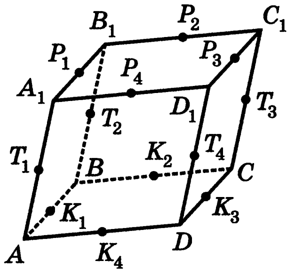
значит $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$ — верное равенство.

Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед.

P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.

Базисные векторы: $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{c}$.



1. Выразите данную алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или точки, данные на ребрах параллелепипеда:

а) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{CC_1} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{BD_1}$.

б) $-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = -\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{C_1B} - \overrightarrow{C_1D_1} = \overrightarrow{D_1B}$.

в) $\dfrac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CT_3} + \overrightarrow{DB} =$

$= \overrightarrow{BT_2} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DT_2}$.

г) $\vec{a} + \vec{b} - \dfrac{1}{2}\vec{c} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CK_3} = \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{K_3B} =$

$= \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{K_3B} = \overrightarrow{K_3B_1}$.

д) $\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} = \underline{\overrightarrow{CC_1}} - \overrightarrow{CK_2} - \underline{\overrightarrow{CD}} = \underline{\overrightarrow{DC_1}} - \overrightarrow{CK_2} =$

$= \overrightarrow{DC_1} - \overrightarrow{DK_4} = \overrightarrow{K_4C_1}$.

2. Выразите через базисные векторы:

а) $\overrightarrow{DP_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} = \vec{b} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

б) $\overrightarrow{A_1K_3} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK_3} = -\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

в) $\overrightarrow{K_4T_3} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CT_3} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

г) $\overrightarrow{P_3B} = \overrightarrow{P_3C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} - \vec{a}$.

д) $\overrightarrow{T_1P_2} = \overrightarrow{T_1A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1P_2} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

3. Выясните, справедливы ли равенства:

а) $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$.

$\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_2B_1} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BK_1} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{P_3K_4} = \overrightarrow{P_3D_1} + \overrightarrow{D_1D} + \overrightarrow{DK_4} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$,

значит $\overrightarrow{P_2K_1} = \overrightarrow{P_3K_4}$ — справедливое равенство.

б) $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$.

$\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CK_2} = -\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$;

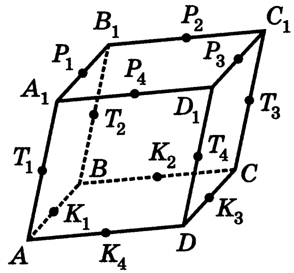
$\overrightarrow{P_4B} = \overrightarrow{P_4A_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} - \vec{a}$,

значит $\overrightarrow{D_1K_2} = \overrightarrow{P_4B}$ — справедливое равенство.

Самостоятельная работа 2 (Алгебраическая сумма векторов)

Вариант 1

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Даны базисные векторы: $\vec{a} = \overrightarrow{DD_1}$; $\vec{b} = \overrightarrow{DA}$; $\vec{c} = \overrightarrow{DC}$.

1. Выразите алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или данные точки на ребрах куба:

а) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

б) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$;

в) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

г) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

д) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

е) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

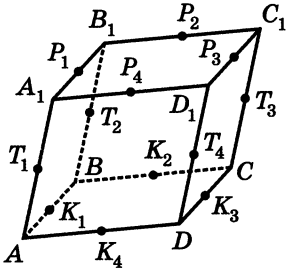
ж) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

2. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы:

а) $\overrightarrow{K_4T_2}$; б) $\overrightarrow{C_1K_1}$; в) $\overrightarrow{P_2K_3}$.

Вариант 2

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб;
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Даны базисные векторы: $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$; $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$; $\vec{c} = \overrightarrow{BB_1}$.

1. Выразите алгебраическую сумму векторов через вектор, начало и конец которого есть обозначенные точки вершин или данные точки на ребрах куба:

а) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

б) $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$;

в) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$;

г) $-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$;

д) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

е) $\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$;

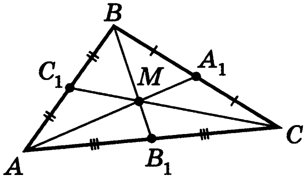
ж) $\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{c}$.

2. Выразите через $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ векторы:

а) $\overrightarrow{K_4T_2}$; б) $\overrightarrow{C_1K_1}$; в) $\overrightarrow{P_2K_3}$.

Векторные свойства, связанные с замечательными точками треугольника

Задача 1. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1 и CC_1, которые пересекаются в точке M. Докажите, что тогда $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.



Доказательство.

а) $\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1} &= \overrightarrow{AA_1}\\ \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1} &= \overrightarrow{BB_1}\\ \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1} &= \overrightarrow{CC_1}\end{aligned}\right|$. Сложим почленно:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB_1}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}.$$

б) Так как AA_1, BB_1 и CC_1 — медианы $\triangle ABC$, то

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{BA_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{CB_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}\\ \overrightarrow{AC_1} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}\right| \Rightarrow \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}.$$

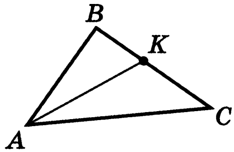
в) Учитывая, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}$,
получим $\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{0}$, но

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{AA_1} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{AM}\\ \overrightarrow{BB_1} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BM}\\ \overrightarrow{CC_1} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CM}\end{aligned}\right|, \text{ значит } \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}\right)=\vec{0},$$

следовательно $\boxed{\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}}$, что и требовалось доказать.

Физический смысл этого равенства в том, что сила, равнодействующая сумме векторов сил тяжести, размещенных в точках A, B и C, равна нулю. Поэтому точка пересечения медиан называется центром тяжести (или центром масс) треугольника.

Задача 2. В $\triangle ABC$ точка K делит сторону BC в отношении $m:n$, считая от точки B. Выразите вектор $\overrightarrow{AK}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.



$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$.

Так как $BK : KC = m : n$

и $BC = BK + KC$,

KC — n частей;

получим, что BK — m частей;

BC — $m + n$ частей.

Значит $BK = \dfrac{m}{m+n}BC$, т. е. $\overrightarrow{BK} = \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$.

Следовательно, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}$.

Учтем, что $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$.

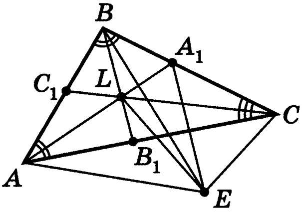
Тогда $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{m}{m+n}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) =$

$= \dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} + \left(1 - \dfrac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{AB}$.

Таким образом, $\boxed{\overrightarrow{AK} = \dfrac{m \cdot \overrightarrow{AC} + n \cdot \overrightarrow{AB}}{m+n}}$.

Примечание. Можно осмыслить это векторное равенство как условие принадлежности точек B, C и K одной прямой BC.

Задача 3. В $\triangle ABC$ точка L есть точка пересечения биссектрис треугольника, где $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$. Докажите, что для любой точки E в плоскости ABC справедливо векторное тождество $\overrightarrow{EL} = \dfrac{a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EB} + c \cdot \overrightarrow{EC}}{a+b+c}$.



Доказательство

Из $\triangle AA_1C$ $\quad AL : LA_1 = AC : A_1C$ (по теореме о биссектрисе внутреннего угла).

Из $\triangle ABC$ $\quad BA_1 : A_1C = AB : AC = c : b$, но $BA_1 + A_1C = BC = a$.

Решая систему $\begin{cases} \dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{c}{b} \\ BA_1 + A_1C = a \end{cases}$; $\quad \begin{cases} BA_1 = \dfrac{c}{b} \cdot A_1C \\ \dfrac{c}{b} \cdot A_1C + A_1C = a \end{cases}$,

получим $A_1C = \dfrac{b}{b+c} \cdot BC = \dfrac{ab}{b+c}$; $\quad A_1C = \dfrac{ab}{b+c}$,

тогда $AL : LA_1 = b : A_1C = b : \dfrac{ab}{b+c} = (b+c) : a$,

т. е. $AL : LA_1 = (b+c) : a$.

Учитывая примечание к задаче 2, для точек A, L и A_1 представим $\overrightarrow{EL} = \dfrac{(b+c) \cdot \overrightarrow{EA_1} + a \cdot \overrightarrow{EA}}{a+b+c}$.

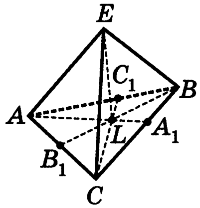
Так как $\overrightarrow{BA_1} : \overrightarrow{A_1C} = c : b$, то $\overrightarrow{EA_1} = \dfrac{c \cdot \overrightarrow{EC} + b \cdot \overrightarrow{EB}}{b+c}$.

Подставим в предыдущее равенство:

$$\overrightarrow{EL} = \frac{(b+c) \cdot \frac{c \cdot \overrightarrow{EC} + b \cdot \overrightarrow{EB}}{b+c} + a\overrightarrow{EA}}{a+b+c}.$$

После упрощения получим $\boxed{\overrightarrow{EL} = \dfrac{a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EB} + c \cdot \overrightarrow{EC}}{a+b+c}}$,

что и требовалось доказать.

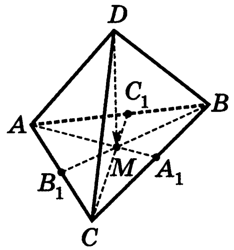


Примечание. Утверждение справедливо и для стереометрического варианта, так как при доказательстве нигде не использовалась принадлежность точки E плоскости $\triangle ABC$.

Рассмотрим треугольную пирамиду $EABC$, где $AB = c$, $BC = a$ и $CA = b$, причем точка L — точка пересечения биссектрис треугольника основания.

Тогда $\boxed{\overrightarrow{EL} = \dfrac{a \cdot \overrightarrow{EA} + b \cdot \overrightarrow{EB} + c \cdot \overrightarrow{EC}}{a+b+c}}$.

Задача 4. Дана треугольная пирамида $DABC$. Точка M — точка пересечения медиан основания пирамиды, т. е. $\triangle ABC$. Докажите, что $\overrightarrow{DM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3}$.



Доказательство

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}$; $\quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}$.

$\overrightarrow{BB_1} = \dfrac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}$ (по правилу сложения векторов — правилу параллелограмма), тогда $\overrightarrow{BB_1} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB}}{2}$.

Учтем, что $\overrightarrow{BM} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB_1}$, т. е. $\overrightarrow{BM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB}}{3}$.

С другой стороны,

$$\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{DB} + \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} - 2\overrightarrow{DB}}{3} = \frac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DB}}{3}.$$

Следовательно, $\boxed{\overrightarrow{DM} = \dfrac{\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}}{3}}$, что и требовалось доказать.

Примечание. Если точка D совпадает с точкой $O \in ABC$, то задача превращается в планиметрическую. Тогда для любой точки O плоскости ABC и точки M пересечения медиан $\triangle ABC$: $\boxed{\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}}$.

Задача 5. В $\triangle ABC$ точка H — точка пересечения высот (ортоцентр), точка O — центр описанной около $\triangle ABC$ окружности. Докажите, что тогда $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Доказательство

Пусть точка H — произвольная точка, для которой справедливо векторное равенство $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. (1)

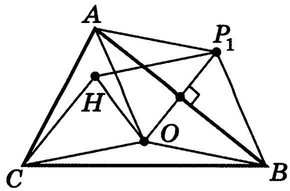
Рассмотрим $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP_1}$, следовательно AP_1BO — ромб. Тогда AP_1BO — параллелограмм по правилу сложения векторов, причем $OA = OB = R_o$.

Значит $OP_1 \perp AB$. Но $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC}$, т. е. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{OC}$.

Подставим выражение для $\overrightarrow{OH}$ в равенство (1),

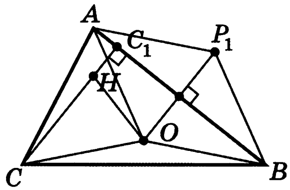
получим $\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,

тогда $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP_1}$.



Значит $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OP_1}$ и $CH \perp AB$.

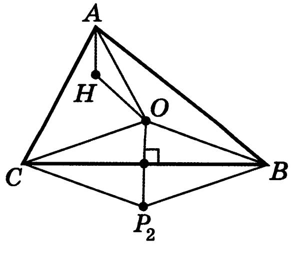
Запомним этот факт.



Аналогично проведем доказательство того, что $AH \perp BC$.

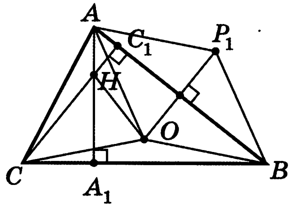
Рассмотрим $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP_2}$.

Значит OBP_2C — ромб, и $\overrightarrow{OP_2} \perp BC$; $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}$, т. е. $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{OA}$.

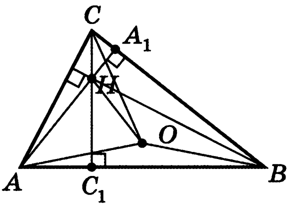


Подставим в левую часть векторного равенства (1):

$\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$,
тогда $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP_2}$,
значит $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OP_2}$ и $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$.



Понятно, что аналогично можно доказать, что $BH \perp AC$. Следовательно, в векторном равенстве $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ доказано, что точка H — не произвольная, а точка пересечения высот треугольника, т. е. ортоцентр $\triangle ABC$.



Тогда $\boxed{\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC}}$, что и требовалось доказать.

Задача 6. В любом треугольнике ABC центр описанной окружности, ортоцентр и центроид (или центр масс) лежат на общей прямой.

Доказательство

Пусть точка O — центр описанной окружности, H — точка пересечения высот, M — точка пересечения медиан.

Как было доказано в примечании к задаче 4,

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3},$$

а из задачи 5 следует, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

Значит $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{3}$, т. е. $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OM}$.

Это означает, что точки O, H и M принадлежат одной прямой — этот замечательный факт был доказан еще Эйлером.

Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Записывается $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$.

Следствие 1. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\left(\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 1;\ \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 0°\right)$.

Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$.

Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $\left(\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = -1;\ \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 180°\right)$.

Следствие 2. Для ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Теорема. Для того чтобы два ненулевых вектора были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно нулю, т. е. для $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Свойства скалярного произведения векторов

1. $\vec{a}^2 \geqslant 0$; если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}^2 > 0$.
2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — коммутативность (переместительный закон).
3. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — дистрибутивность относительно сложения и умножения векторов (распределительный закон).
4. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ — ассоциативность относительно умножения на число (сочетательный закон).

Скалярное произведение векторов в координатной форме

Можно доказать на основе предыдущих определений, что справедлива следующая теорема.

Теорема. Для векторов, заданных в координатной форме на плоскости — $\vec{a}\ (x_1; y_1)$, $\vec{b}\ (x_2; y_2)$, верно равенство:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$.

Следствие 1. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Следствие 2. Для $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$ $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$.

Следствие 3. Для $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

Теорема. Для векторов, заданных в координатной форме в пространстве — $\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$, верно равенство:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

Следствие 1. Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$ и $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.

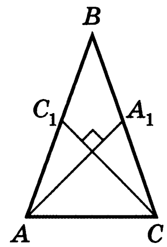
Следствие 2. Для $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Пример. Найдите косинус угла, лежащего против основания равнобедренного треугольнка, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Дано:
$\triangle ABC$
$AB = BC$
$AA_1 = m_{BC}$
$CC_1 = m_{AB}$
$AA_1 \perp CC_1$

Найдите $\cos(\angle ABC)$.



а) Положим $\overrightarrow{BA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{BC} = \vec{c}.$

$\left|\overrightarrow{BA}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right|$, т. е. $|\vec{a}| = |\vec{c}|$.

Тогда

$$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BA_1} - \overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a};$$

$$\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{BC_1} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}.$$

б) Так как $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{CC_1}$, то $\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{CC_1} = 0$.

Значит $\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) = 0$.

Тогда $\frac{1}{2}\vec{c} \cdot \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{c}^2 + \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

$\vec{c}^2 = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, следовательно $\frac{5}{4}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\angle ABC) = |\vec{a}|^2$.

Значит $\cos(\angle ABC) = \dfrac{|\vec{a}|^2}{\frac{5}{4}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|}$, т. е. $\boxed{\cos(\angle ABC) = \frac{4}{5}}$.

Векторное доказательство некоторых геометрических теорем

<u>Определение.</u> Если из истинности утверждения A (A — И) следует истинность утверждения B (B — И), т. е. если логическая цепочка $\boxed{(A - \text{И}) \Rightarrow (B - \text{И})}$ истинна, то говорят, что:

а) истинность утверждения A достаточна для истинности утверждения B, т. е. истинность утверждения A есть признак истинности утверждения B;

б) истинность утверждения B необходима для истинности утверждения A, т. е. истинность утверждения B есть свойство истинности утверждения A.

Примечание. Более подробно см. книгу А. Х. Шахмейстер Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии. СПб, М.: «Петроглиф», 2008 г., с. 114–115.

Теорема 1. Для того чтобы параллелограмм являлся ромбом, необходимо и достаточно, чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярны.

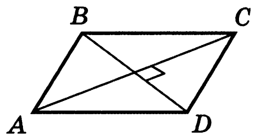
Достаточность

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

$AC \perp BD$

$AB = AD$



Доказательство

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$; $\quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$.

Так как $AC \perp BC$, то $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 0$,

значит $\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = 0$,

тогда $\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 = 0$, т. е. $\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0$,

Но $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$, $\quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = AD$, тогда $AB = AD$,

т. е. $ABCD$ — ромб, что и требовалось доказать.

Необходимость

Дано:

$ABCD$ — ромб

$AB = AD$

$AC \perp BD$

Доказательство

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}; \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}.$

Рассмотрим скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right)\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AD}^2 =$$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 - \left|\overrightarrow{AD}\right|^2 = 0, \text{ так как } AB = AD \text{ (по условию)}.$$

Значит $AC \perp BD$.

Теорема 2. Для того чтобы параллелограмм являлся прямоугольником, необходимо и достаточно, чтобы диагонали параллелограмма были равны.

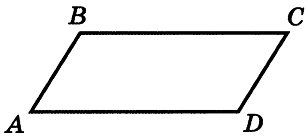
Достаточность

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

$AC = BD$

Докажите $AB \perp AD$.



Доказательство

а) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}; \quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}.$

б) $$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2 =$$

$$= \overrightarrow{AB}^2 + 2\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cos(\angle BAD) + \overrightarrow{AD}^2 =$$

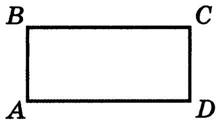
$$= AB^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) + AD^2.$$

в) $$\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cos(\angle BAD) + \overrightarrow{AD}^2 =$$

$$= AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) + AD^2.$$

г) $AB^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) + AD^2 =$
$= AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) + AD^2.$
Тогда $4AB \cdot AD \cdot \cos(\angle BAD) = 0$, значит $\cos(\angle BAD) = 0$.
Следовательно, $\angle BAD = 90°$, т. е. $AB \perp AD$.

Необходимость



Дано:

$ABCD$ — прямоугольник

Докажите $AC = BD$

Доказательство

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Так как $AB \perp AD$, то $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Тогда

$\overrightarrow{AC}^2 = AB^2 + 2AB \cdot AD \cdot \cos 90° + AD^2 = AB^2 + AD^2$;

$\overrightarrow{BD}^2 = AB^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos 90° + AD^2 = AB^2 + AD^2$;

$\begin{cases} AC^2 = AB^2 + AD^2 \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 \end{cases}$, следовательно, $AC^2 = BD^2$,

тогда $AC = BD$, что и требовалось доказать.

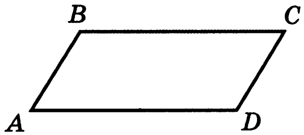
Теорема 3. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ являлся параллелограммом, необходимо, чтобы сумма квадратов всех четырех сторон четырехугольника была равна сумме квадратов его диагоналей.

Дано:

$ABCD$ — параллелограмм

Докажите $AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2$

Доказательство



$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\quad \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

Тогда

$\overrightarrow{AC}^2 = \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2$;

$\overrightarrow{BD}^2 = \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}^2$.

Сложив почленно, получим $\left|\overrightarrow{AC}\right|^2 + \left|\overrightarrow{BD}\right|^2 = 2\left|\overrightarrow{AB}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2$.

Так как $AB = DC$ и $AD = BC$, то

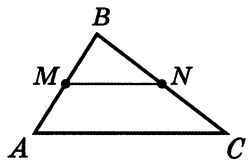
$\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + DC^2 + AD^2}$,

что и требовалось доказать.

Теорема 4. Средняя линия треугольника и трапеции равна полусумме основания (оснований) и параллельна основанию (основаниям).

а) Сначала рассмотрим треугольник.

Дано:
$\triangle ABC$
$M \in AB$
$N \in BC$
$AM = MB$
$BN = NC$



Докажите: $MN \parallel AD$; $MN = \frac{1}{2}AC$.

1. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$; $\quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB}$;

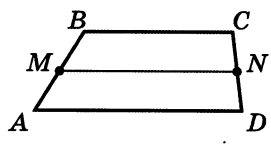
   $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

2. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,

   т. е. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, значит $MN \parallel AC$ и $MN = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

б) Теперь докажем теорему для трапеции.

Дано:
$ABCD$ — трапеция
$BC \parallel AD$
$M \in AB$
$N \in CD$
$AM = MB$
$CN = ND$



Докажите: $MN \parallel AD$; $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} =$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{BC},$

тогда $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BC}.$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} =$

$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right) + \overrightarrow{MN}.$

Подставляя вместо $\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right)$ $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BC}$, получим

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MN}$, т. е. $\overrightarrow{MN} = \dfrac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}}{2}.$

Так как $\overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$.

Значит $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AD}\right) = \frac{1+k}{2}\overrightarrow{AD},$

т. е. $\overrightarrow{MN} \parallel \overrightarrow{AD}$. Тогда $MN \parallel AD$.

2. Так как $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right),$

то $\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2\right),$

$\left|\overrightarrow{MN}\right|^2 = \frac{1}{4}\left(\left|\overrightarrow{AD}\right|^2 + 2\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| \cdot \cos 0^\circ + \left|\overrightarrow{BC}\right|^2\right) =$

$= \frac{1}{4}\left(AD^2 + 2AD \cdot BC + BC^2\right) = \frac{1}{4}(AD + BC)^2.$

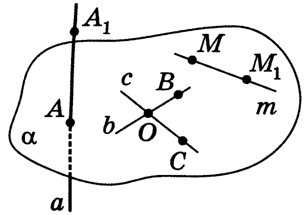
Значит $MN^2 = \frac{1}{4}\left(AD + BC\right)^2$, т. е. $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$, что и требовалось доказать.

Теорема 5 (признак перпендикулярности прямой и плоскости). Для того чтобы прямая была перпендикулярна плоскости, достаточно, чтобы она была перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим плоскости.

Дано:

$a \perp b$
$a \perp c$
$b \cap c = O$
$b \in \alpha$
$c \in \alpha$

$a \perp \alpha$



Так как по определению перпендикулярности прямой и плоскости прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна любой прямой плоскости, то докажем, что любая прямая m перпендикулярна a, где $m \in \alpha$.

а) На прямых b и c выберем точки B и C, несовпадающие с точкой O.

б) На прямых a и m выберем пары несовпадающих точек A и A_1, M и M_1.

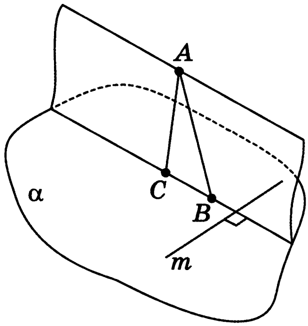
в) Разложим вектор $\overrightarrow{MM_1}$ по неколлинеарным векторам $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, тогда $\overrightarrow{MM_1} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$.

г) Найдем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = \left(x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{AA_1} = x \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} + y \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1}.$$

Так как $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ и $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$ ($a \perp c$, $a \perp b$), то $\overrightarrow{MM_1} \cdot \overrightarrow{AA_1} = 0$, значит $\overrightarrow{MM_1} \perp \overrightarrow{AA_1}$. Таким образом, прямая m перпендикулярна a, что и требовалось доказать.

Теорема 6. Для того чтобы прямая, принадлежащая плоскости, была перпендикулярна наклонной, необходимо и достаточно, чтобы эта прямая была перпендикулярна проекции наклонной к плоскости на эту плоскость.



Достаточность

Дано:

$AC \perp \alpha$
AB — наклонная
CB — проекция AB на плоскость α
$m \in \alpha$
$m \perp CB$

Докажите $m \perp AB$.

По условию прямая $m \in \alpha$, причем $m \perp CB$, где CB — проекция прямой AB на плоскость α, и $AC \perp \alpha$.

Тогда $AC \perp m$ (по определению перпендикуляра к плоскости).

Значит, $\left.\begin{matrix} m \perp CB \\ m \perp AC \end{matrix}\right|$, т. е. $m \perp ABC$ (плоскости).

Тогда $m \perp AB$, что и требовалось доказать.

Необходимость

Дано:

$m \in \alpha$
$m \perp AB$
$AC \perp \alpha$
CB — проекция AB на плоскость α

Докажите $m \perp CB$.

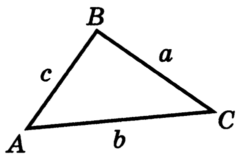
Так как $AC \perp \alpha$, то $AC \perp m$, а по условию $AB \perp m$, значит $m \perp ABC$ (плоскости).

Таким образом, $m \perp CB$, что и требовалось доказать.

Использование скалярного произведения для нахождения метрических отношений в треугольнике и четырехугольнике

Для нахождения скалярного произведения двух векторов можно обойтись без знания косинуса угла между ними, если известна длина третьего вектора, являющегося суммой или разностью исходных векторов.

Пример 1



$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, тогда

$\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)^2 =$

$= \overrightarrow{AB}^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}^2 = \overrightarrow{AC}^2.$

Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right| = c, \quad \left|\overrightarrow{DC}\right| = a, \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = b,$

то $c^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + a^2 = b^2.$

Следовательно, $\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \dfrac{b^2 - a^2 - c^2}{2}}.$

Пример 2. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$,

тогда $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2,$

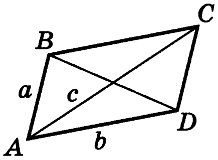
следовательно, $a^2 = b^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + c^2,$

значит $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2}.$

Примечание. В примере 1 векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не имели общего начала. В примере 2 векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ имеют общее начало.

Практикум 9
(Векторное решение планиметрических задач)

Задача 1. В параллелограмме $ABCD$ известны длины сторон $AB = a$, $AD = b$ и длина диагонали $AC = c$. Найдите длину диагонали BD.



Это известная задача. Рассмотрим ее векторное решение.

а) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$. Используем результаты примера 2, получим $BD^2 = b^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + a^2$.

б) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Используем результаты примера 1, получим

$AC^2 = a^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + b^2$, т. е. $c^2 = a^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + b^2$.

в) Подводя итоги, имеем $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BD}^2 = b^2 - 2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} + a^2 \\ c^2 = a^2 + 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + b^2 \end{array}\right|$.

Складывая почленно, получим:

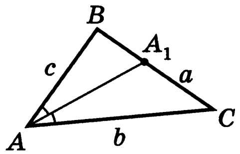
$\overrightarrow{BD}^2 + c^2 = b^2 - \underline{2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}} + a^2 + a^2 + \underline{2 \cdot \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}} + b^2$.

Значит, $\boxed{BD^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}$.

С другой стороны, так как $BD = 2m_{AC}$,

где m_{AC} — медиана к стороне AC,

то $m_{AC}^2 = \dfrac{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}{4}$, или $\boxed{m_{AC} = \dfrac{\sqrt{2\left(a^2 + b^2\right) - c^2}}{2}}$.



Задача 2. В $\triangle ABC$ найдите биссектрису угла A ($l_{\angle A} = l_\alpha = l_{BC}$, где l_{BC} — биссектриса к стороне BC), если $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$.

а) Как известно, $AB : AC = BA_1 : A_1C = c : b$

$$\left(\frac{AB}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C} = \frac{c}{b}\right)$$

или $AC : AB = A_1C : BA_1 = b : c$, тогда

$$\begin{cases} A_1C = \dfrac{b}{c} \cdot BA_1 \\ A_1C + BA_1 = a \end{cases}, \text{ значит } \frac{b}{c} \cdot BA_1 + BA_1 = a,$$

т. е. $BA_1 = \dfrac{a}{1+\frac{b}{c}}$; $BA_1 = \dfrac{ac}{b+c}$. Следовательно,

$$\frac{BA_1}{BC} = \frac{ac}{b+c} : a = \frac{c}{b+c} \cdot BC, \text{ т. е. } BA_1 = \frac{c}{b+c} \cdot BC.$$

б) $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1}$.

Но $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$, тогда $\overrightarrow{BA_1} = \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} - \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AB}$,

значит $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA_1} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} - \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AB} =$

$= \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} - \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$.

Итак, $\overrightarrow{AA_1} = \dfrac{c}{b+c}\overrightarrow{AC} - \dfrac{b}{b+c}\overrightarrow{AB}$.

в) Возведем обе части векторного равенства в квадрат:

$$\overrightarrow{AA_1}^2 = \frac{c^2}{(b+c)^2}\overrightarrow{AC}^2 + 2 \cdot \frac{c \cdot b}{(b+c)^2} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{b^2}{(b+c)^2}\overrightarrow{AB}^2,$$

т. е. $l_{BC}^2 = \dfrac{c^2b^2}{(b+c)^2} + 2 \cdot \dfrac{cb}{(b+c)^2} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \dfrac{b^2c^2}{(b+c)^2}$.

г) Используя результаты примера 2 (с. 271), получим, что

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}.$$

Подставим в полученное векторное равенство:

$$l_{BC}^2=\frac{c^2b^2}{(b+c)^2}+\frac{2cb}{(b+c)}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+\frac{b^2c^2}{(b+c)^2}.$$

После преобразований:

$$l_{BC}^2=\frac{bc}{(b+c)^2}\left(bc+b^2+c^2-a^2+bc\right)=\frac{bc\left((b+c)^2-a^2\right)}{(b+c)^2}.$$

Значит $\boxed{l_{BC}=\dfrac{\sqrt{bc(a+b+c)(b+c-a)}}{b+c}=l_a}$.

Получили еще одну формулу нахождения биссектрисы треугольника по его сторонам (см. книгу А. Х. Шахмейстер Геометрические задачи на экзаменах. Часть I. Планиметрия. СПб: «Петроглиф», М.: МЦНМО. 2011, с. 104, следствие 5).

Задача 3. В $\triangle ABC$ найдите расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения медиан, если известны стороны треугольника.

а) Используем результаты решения задачи 4 (с. 258).

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3},$$

где M — точка пересечения медиан.

б) Учитывая, что $OA=OB=OC=R$, возведем векторное равенство в квадрат:

$$\overrightarrow{OM}^2=\frac{1}{9}\Big(\overrightarrow{OA}^2+\overrightarrow{OB}^2+\overrightarrow{OC}^2+$$

$$+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\Big)=$$

$$=\frac{1}{9}\left(R^2+R^2+R^2+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+2\cdot\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+2\cdot\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}\right).$$

Далее используем результаты примера 2 (стр. 271), получим

из $\triangle AOB$:

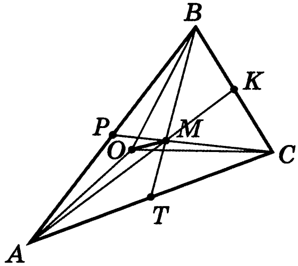
$$2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - AB^2 = R^2 + R^2 - c^2 = 2R^2 - c^2;$$

из $\triangle AOC$:

$$2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = OA^2 + OC^2 - AC^2 = R^2 + R^2 - b^2 = 2R^2 - b^2;$$

из $\triangle BOC$:

$$2 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = OB^2 + OC^2 - BC^2 = R^2 + R^2 - a^2 = 2R^2 - a^2.$$



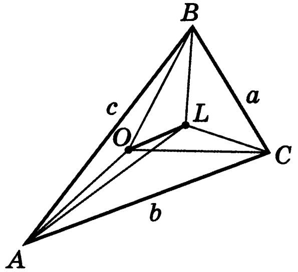
в) Подставим в предыдущее векторное выражение:

$$\overrightarrow{OM}^2 = \frac{1}{9}\left(3R^2 + 2R^2 - c^2 + 2R^2 - b^2 + 2R^2 - a^2\right) =$$

$$= R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Значит, $\boxed{OM} = \dfrac{\sqrt{9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}}{3}$.

Задача 4 (задача Эйлера). В $\triangle ABC$ найдите расстояние от центра описанной окружности до точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$, зная радиус вписанной и описанной окружности.



а) Используем результаты решения задачи 3 (стр. 256), где O — центр описанной окружности, L — точка пересечения биссектрис:

$$\overrightarrow{OL} = \frac{a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC}}{a+b+c}.$$

Возведем в квадрат, зная, что $OA = OB = OC = R$.

$$\overrightarrow{OL}^2 = \frac{1}{(a+b+c)^2} \cdot \Big(\left(a^2+b^2+c^2\right) R^2 + \\ + 2ab \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2ac \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2bc \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \Big).$$

б) Из примера 2 (стр. 271) известно, что

$2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2R^2 - c^2;$

$2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 2R^2 - b^2;$

$2 \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 2R^2 - a^2.$

Тогда

$$\overrightarrow{OL}^2 = \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)} \Big(\left(a^2+b^2+c^2\right) R^2 + ab\left(2R^2 - c^2\right) + \\ + ac\left(2R^2 - b^2\right) + bc\left(2R^2 - a^2\right) \Big) =$$

$$= \frac{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2 R^2 - (a+b+c) \cdot abc}{(a+b+c)^2} = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}.$$

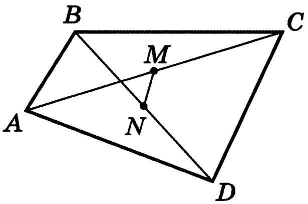
в) Так как $S=(a+b+c)r_{\text{в}}$ и $S=\dfrac{abc}{4R}$, то $\dfrac{1}{2}(a+b+c)r_{\text{в}}=\dfrac{abc}{4R}$,

откуда следует, что $2Rr_{\text{в}}=\dfrac{abc}{a+b+c}$.

Значит, $OL^2=R^2-2Rr_{\text{в}}$,

следовательно $\boxed{OL=\sqrt{R^2-2Rr_{\text{в}}}}$.

Задача 5. В четырехугольнике $ABCD$ известны все его стороны и диагонали. Найдите расстояние между серединами его диагоналей.



а) $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BD}$;

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{CD}^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}^2+\underline{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}}-$$

$$-\frac{1}{2}\underline{\underline{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}}-\underline{\underline{\underline{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}}}}.$$

б) Из $\triangle ACD$ следует, что $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$,

тогда $\underline{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}}=\dfrac{AD^2-CD^2-AC^2}{2}$.

Из $\triangle BCD$ следует, что $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$,

тогда $\underline{\underline{\underline{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{BD}}}}=\dfrac{CD^2+BD^2-BC^2}{2}$.

в) Для нахождения $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$, у которых нет общих точек, представим $\overrightarrow{AC}$ в виде суммы: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Тогда

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\overrightarrow{BD}=\underline{\underline{\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}}}}+\underline{\underline{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}}},\text{ где}$$

из $\triangle ABD$: $\underline{\underline{\underline{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD}}}}=\dfrac{AD^2-AB^2-BD^2}{2}$;

из $\triangle BCD$: $\underline{\underline{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}}}=\dfrac{BC^2+BD^2-CD^2}{2}$.

Тогда, сложив почленно, получим:

$$\underline{\underline{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}}}=\frac{AD^2-AB^2-BD^2+BC^2+BD^2-CD^2}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(AD^2-AB^2+BC^2-CD^2\right).$$

г) Подставим в векторное выражение из пункта а) выражения из пунктов б) и в), получим:

$$MN^2=\frac{1}{4}AC^2+CD^2+\frac{1}{4}BD^2+\frac{1}{2}\left(AD^2-CD^2-AC^2\right)-$$

$$-\frac{1}{4}\left(AD^2-AB^2+BC^2-CD^2\right)-\frac{1}{2}\left(CD^2+BD^2-BC^2\right).$$

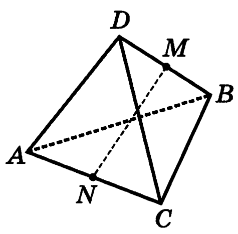
После приведения подобных членов:

$$MN^2=\frac{1}{4}\left(AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2\right).$$

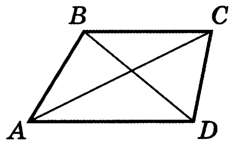
Значит

$$\boxed{MN=\frac{\sqrt{AB^2+BC^2+CD^2+AD^2-AC^2-BD^2}}{2}}.$$

Примечание. Эта задача имеет стереометрическую интерпретацию. Для пирамиды $DABC$, зная ее ребра, можно найти расстояние между серединами скрещивающихся ребер. Очевидно, что решение и ответ — те же.



Задача 6. Для любой трапеции сумма квадратов ее диагоналей равна сумме квадратов боковых сторон, сложенных с удвоенным произведением оснований, т. е. для $ABCD$ ($BC \parallel AD$): $AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2AD \cdot BC$.



а) Сперва рассмотрим задачу в более общем виде, т. е. для произвольного четырехугольника $ABCD$.

Будем использовать векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, соответствующие одноименным сторонам.

б) В частной задаче $BC \parallel AD$, т. е. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = BC \cdot AD$.

Попытаемся найти $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$ в общем случае. Для этого выразим $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ через другие векторы:

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}; \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}.$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}\right) =$$

$$= AC^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD}.$$

Из $\triangle ACD$ следует, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD}$,

тогда $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2}$.

Из $\triangle BCD$ следует, что $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$,

тогда $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CD} = \dfrac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2}$, значит

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2} - \frac{BD^2 + CD^2 - BC^2}{2} =$$

$$= \frac{AD^2 - AC^2 + BC^2 - BD^2}{2}.$$

Полученные результаты подставим в векторное выражение $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$, тогда

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = AC^2 - \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2} + \frac{AD^2 - AC^2 - CD^2}{2} - \frac{AD^2 - AC^2 + BC^2 - BD^2}{2} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2\right).$$

Итак, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2\right)$ — любопытный результат.

Далее, полагая, что $BC \parallel AD$, имеем $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = BC \cdot AD$. Подставим в полученное векторное равенство:

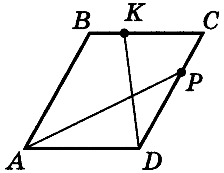
$$BC \cdot AD = \frac{1}{2}\left(AC^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2\right).$$

После преобразования получим

$$\boxed{AC^2 + BD^2 = AB^2 + CD^2 + 2 \cdot BC \cdot AD},$$

что и требовалось доказать.

Задача 7. Дан параллелограмм $ABCD$, где $AB = 10$ и $AD = 6$. Точка $K \in BC$, причем $BK : CK = 1 : 2$; точка $P \in DC$, причем $DP : PC = 3 : 2$. Найдите косинус угла между AP и DK, если $\angle BAD = 60°$.



Рассмотрим векторное решение задачи.

а) Положим $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}$.

Очевидно, что $|\vec{b}| = 10$ и $|\vec{a}| = 6$.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60°$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} = 30$.

б) Так как $BK : CK = 1 : 2$, то $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\vec{a}$.

Так как $DP : PC = 3 : 2$, то $\overrightarrow{DP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{DC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\vec{b}$.

в) $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{a} + \dfrac{3}{5}\vec{b}.$

$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \vec{b} - \dfrac{2}{3}\vec{a}.$

г) Найдем длину вектора $\overrightarrow{AP}$.

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AP}^2} = \sqrt{\left(\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\cdot\vec{a}\cdot\frac{3}{5}\vec{b} + \frac{9}{25}\vec{b}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{a}|^2 + \frac{6}{5}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{9}{25}|\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{36 + \frac{6}{5}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{2} + \frac{9}{25}\cdot 100} = 6\sqrt{3}.$$

$$\left|\overrightarrow{DK}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DK}^2} = \sqrt{\left(\vec{b}^2 - \frac{2}{3}\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\vec{b} - \frac{4}{3}\cdot\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{a}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{b}|^2 - \frac{4}{3}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{4}{9}\cdot|\vec{a}|^2} =$$

$$= \sqrt{100 - \frac{2}{3}\cdot 6\cdot 10 + \frac{4}{9}\cdot 36} = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}.$$

д) Найдем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DK} = \left(\vec{a} + \frac{3}{5}\vec{b}\right)\left(\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{a}\right) =$$

$$= \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \frac{3}{5}\vec{b}^2 - \frac{2}{3}\vec{a}^2 - \frac{2}{5}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} = \frac{3}{5}|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{3}{5}|\vec{b}|^2 - \frac{2}{3}|\vec{a}|^2.$$

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DK} = \frac{3}{5}\cdot 6\cdot 10\cdot\frac{1}{2} + \frac{3}{5}\cdot 100 - \frac{2}{3}\cdot 36 = 54.$$

е) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DK}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DK}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DK}\right|},$

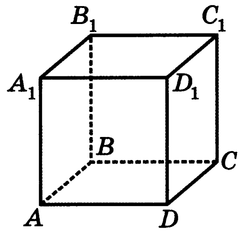
т. е. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DK}}\right) = \dfrac{54}{6\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{19}} = \dfrac{9}{2\sqrt{57}} = \dfrac{3}{38}\sqrt{57}.$

Итак, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DK}}\right) = \boxed{\dfrac{3}{38}\sqrt{57}}.$

Практикум 10 (Использование скалярного произведения для нахождения углов и расстояний)

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ со стороной t.

Найдите:



а) $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}$;

б) $\overrightarrow{CD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$;

в) $\left(\widehat{\overrightarrow{DC_1};\overrightarrow{CB_1}}\right)$;

г) $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C};\overrightarrow{D_1B_1}}\right)$;

д*) $\rho(A_1D;AB_1)$.

Введем базисные векторы $\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$; $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$, где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=t$, $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right)=\left(\widehat{\vec{c};\vec{b}}\right)=90^\circ$.

а) Найдем $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}$.

1. $\overrightarrow{AB_1}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$.
2. $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{c}$; $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$.

   При $\vec{a}=\vec{b}$ $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=0$, тогда $\boxed{\vec{a}^2=|\vec{a}|^2}$.
3. $\overrightarrow{AB_1}\cdot\overrightarrow{BC}=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}=0+0=0$

   (так как $\vec{a}\perp\vec{c}$, то $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$; так как $\vec{b}\perp\vec{c}$, то $\vec{b}\cdot\vec{c}=0$).

б) Найдем $\overrightarrow{CD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}$.

1. $\overrightarrow{CD_1}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DD_1}=-\vec{b}+\vec{a}$.
2. $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}$.
3. $\overrightarrow{CD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1}=\left(-\vec{b}+\vec{a}\right)\left(\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right)=$

   $=-\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}-\vec{b}^2+\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}-\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\vec{a}^2=$

   $=-|\vec{b}|^2+|\vec{a}|^2=-t^2+t^2=\boxed{0}$.

   (Подчеркнутые скалярные произведения равны 0.)

в) Найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CB_1}}\right)$.

1. $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{b} + \vec{a}$.
2. $\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BB_1} = -\vec{c} + \vec{a}$.

$\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$ — эта формула справедлива при $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, т. е. если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — ненулевые. $\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}}$.

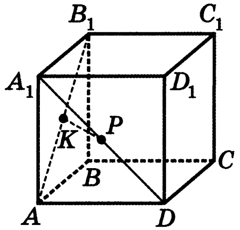
3. $\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = \left(\vec{b} + \vec{a}\right)(-\vec{c} + \vec{a}) = -\underline{\vec{b} \cdot \vec{c}} - \underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} + \underline{\vec{b} \cdot \vec{a}} + \vec{a}^2 =$
$= \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t^2$.
(И в этом примере подчеркнуты нулевые скалярные произведения.)
4. $\left|\overrightarrow{DC_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DC_1}^2} = \sqrt{\left(\vec{b} + \vec{a}\right)} = \sqrt{\vec{b}^2 + 2\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{a}^2} =$
$= \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2} = \sqrt{t^2 + t^2} = t\sqrt{2}$.
5. $\left|\overrightarrow{CB_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{CB_1}^2} = \sqrt{(-\vec{c} + \vec{a})^2} = \sqrt{\vec{c}^2 - 2\underline{\vec{c} \cdot \vec{a}} + \vec{a}^2} =$
$= \sqrt{|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2} = \sqrt{t^2 + t^2} = t\sqrt{2}$.
6. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CB_1}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{DC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}}{\left|\overrightarrow{DC_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CB_1}\right|} = \dfrac{t^2}{t\sqrt{2} \cdot t\sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

Значит, $\left(\widehat{\overrightarrow{DC_1}; \overrightarrow{CB_1}}\right) = \boxed{60^\circ}$.

г) Найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{D_1B_1}}\right)$.

1. $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$;
$\overrightarrow{D_1B_1} = \overrightarrow{D_1C_1} + \overrightarrow{C_1B_1} = \vec{b} - \vec{c}$.
2. $\overrightarrow{A_1C} \cdot \overrightarrow{D_1B_1} = \left(-\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}\right)\left(\vec{b} - \vec{c}\right) =$
$= -\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \underline{\vec{c} \cdot \vec{b}} + \vec{b}^2 + \underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} - \vec{c}^2 - \underline{\vec{b} \cdot \vec{c}} =$
$= |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 = t^2 - t^2 = 0$,
значит $\overrightarrow{A_1C} \perp \overrightarrow{D_1B_1}$, т.е. $\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \overrightarrow{D_1B_1}}\right) = \boxed{90^\circ}$.

д*) Найдем расстояние между диагоналями граней куба $\rho(A_1D; AB_1)$.



Выразим векторы $\overrightarrow{A_1D}$ и $\overrightarrow{AB_1}$ через базисные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a} + \vec{b}$.

Так как $\rho(A_1D; AB_1) = KP$,

где $\begin{cases} KP \perp A_1D \\ KP \perp AB_1 \end{cases}$, тогда $\begin{cases} \overrightarrow{KP} \perp \overrightarrow{AB_1} \\ \overrightarrow{KP} \perp \overrightarrow{A_1D} \end{cases}$,

значит $\begin{cases} \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0 \\ \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{A_1D} = 0 \end{cases}$.

Положим:

$\overrightarrow{AK} = x\overrightarrow{AB_1} = x\vec{a} + x\vec{b}$ $\left(\overrightarrow{AB_1} = \vec{a} + \vec{b}\right)$;

$\overrightarrow{DP} = y\overrightarrow{A_1D} = -y\vec{a} + y\vec{c}$ $\left(\overrightarrow{A_1D} = -\vec{a} + \vec{c}\right)$.

Выразим $\overrightarrow{KP}$ через базисные.

$\overrightarrow{KP} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$,

тогда $\overrightarrow{KP} = -x\vec{a} - x\vec{b} + \vec{c} - y\vec{a} + y\vec{c} = -(x+y)\vec{a} + (y+1)\vec{c} - x\vec{b}$.

Значит $\begin{cases} \left(-(x+y)\vec{a} + (y+1)\vec{c} - x\vec{b}\right) \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \\ \left(-(x+y)\vec{a} + (y+1)\vec{c} - x\vec{b}\right) \cdot (-\vec{a} + \vec{c}) = 0 \end{cases}$.

Получим

$$\begin{cases} -(x+y)\vec{a}^2 - (x+y)\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \\ \qquad +(y+1)\underline{\vec{c} \cdot \vec{a}} + (y+1)\underline{\vec{c} \cdot \vec{b}} - x\underline{\vec{b} \cdot \vec{a}} - x\vec{b}^2 = 0 \\ (x+y)\vec{a}^2 - (x+y)\underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} - (y+1)\underline{\vec{c} \cdot \vec{a}} + (y+1)\vec{c}^2 + \\ \qquad +x\underline{\vec{b} \cdot \vec{a}} - x\underline{\vec{b} \cdot \vec{c}} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -(x+y)|\vec{a}|^2 - x|\vec{b}|^2 = 0 \\ (x+y)|\vec{a}|^2 + (y+1)|\vec{c}|^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(x+y)t^2 - xt^2 = 0 \\ (x+y)t^2 + (y+1)t^2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x-y-x = 0 \\ x+y+y+1 = 0 \end{cases} \quad (t \neq 0);$$

$$\begin{cases} y = -2x \\ x + 2(-2x) + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = -\dfrac{2}{3} \\ x = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Значит $\overrightarrow{KP} = -\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)\vec{a} + \left(-\frac{2}{3} + 1\right)\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$,

т. е. $\overrightarrow{KP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}$.

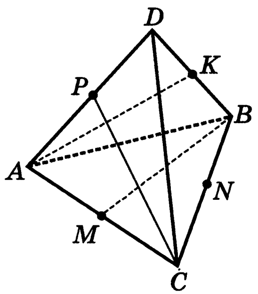
$$KP = \left|\overrightarrow{KP}\right| = \sqrt{\overrightarrow{KP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{3}\vec{b}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 + 2\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} - 2\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} - 2\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2} = \frac{1}{3}\sqrt{t^2 + t^2 + t^2} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}t}.$$

2. $DABC$ — правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Известно, что P, K, N и M — середины ребер.

Найдите:



а) $\left(\widehat{AD;CB}\right)$;

б) $\left(\widehat{CP;AK}\right)$;

в) $\left(\widehat{BM;DC}\right)$;

г) $\rho(P;N)$;

д*) $\rho(CP;AK)$.

Для решения задачи введем базисные векторы:

$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, где $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = t$,

$\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \left(\widehat{\vec{b};\vec{c}}\right) = \left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right) = 60^\circ$.

а) Найдем $\left(\widehat{AD;CB}\right)$.

Для этого сначала найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{AD};\overrightarrow{CB}}\right)$.

$\overrightarrow{AD} = \vec{a}$.

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \vec{b} - \vec{c}$.

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \vec{a} \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} =$$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) - |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right) = t^2 \cdot \frac{1}{2} - t^2 \cdot \frac{1}{2} = 0,$$

т. е. $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{CB}$, значит $AD \perp CB$.

Следовательно, $\left(\widehat{AD;CB}\right) = \boxed{90^\circ}$.

б) Найдем $\left(\widehat{CP;AK}\right)$.

1. $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AP} = -\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}$.

2. $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

3. $$\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{AK} = \left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{b} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 60^\circ + \frac{1}{4} \cdot |\vec{a}|^2 - \frac{1}{2} \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ +$$

$$+ \frac{1}{4} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 60^\circ =$$

$$= -\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{8}t^2 = -\frac{1}{8}t^2.$$

4. $\left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{\overrightarrow{CP}^2} = \sqrt{\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)^2} = \sqrt{\vec{c}^2 - \vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{a}^2} =$

$= \sqrt{|\vec{c}|^2 - |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{1}{4}|\vec{a}|^2} =$

$= \sqrt{t^2 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4}t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t.$

5. $\left|\overrightarrow{AK}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AK}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{4}t^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}t.$

6. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AK}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{AK}}{\left|\overrightarrow{CP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AK}\right|} = \dfrac{-\frac{1}{8}t^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 t^2} = -\dfrac{1}{6}.$

Итак, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AK}}\right) < 0$, т. е. $\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AK}}\right) > 90^\circ$.

Но $\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AK}}\right) \leqslant 90^\circ$, так как угол между прямыми по определению всегда не тупой.

Тогда $\cos\left(\widehat{CP;AK}\right) = \left|\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AK}}\right)\right| = \dfrac{1}{6}$,

т. е. $\boxed{\left(\widehat{CP;AK}\right) = \arccos\left(\frac{1}{6}\right)}$.

в) Найдем $\left(\widehat{BM;DC}\right)$.

Вначале найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DC}}\right)$.

1. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

2. $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = -\vec{a} + \vec{c}.$

3. $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DC}=\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)(-\vec{a}+\vec{c})=\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{c}^2=$
$=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 60^\circ-\frac{1}{2}|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 60^\circ-|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2=$
$=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t^2=-\frac{3}{4}t^2.$

4. $\left|\overrightarrow{BM}\right|=\sqrt{\overrightarrow{BM}^2}=\sqrt{\left(-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=$
$=\sqrt{\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}^2}=\sqrt{|\vec{b}|^2-|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2}=$
$=\sqrt{t^2-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{4}t^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}t.$

5. $\left|\overrightarrow{DC}\right|=\sqrt{\overrightarrow{DC}^2}=\sqrt{(-\vec{a}+\vec{c})^2}=$
$=\sqrt{|\vec{a}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ+|\vec{c}|^2}=$
$=\sqrt{t^2-2\cdot\frac{1}{2}t^2+t^2}=t.$

Можно было сразу понять, что DC — ребро правильного тетраэдра, у которого все ребра равны.

6. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DC}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{DC}}{\left|\overrightarrow{BM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC}\right|}=\dfrac{-\frac{3}{4}t^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Тогда $\left(\widehat{\overrightarrow{BM};\overrightarrow{DC}}\right)=150^\circ.$

Но $\left(\widehat{BM;DC}\right)$ — не тупой, значит
$\left(\widehat{BM;DC}\right)=180^\circ-150^\circ=\boxed{30^\circ}.$

г) Найдем $\rho(P;N)$.

Так как $PN=\left|\overrightarrow{PN}\right|$, то найдем вначале $\left|\overrightarrow{PN}\right|$.

1. $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=$
$=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$, так как $\overrightarrow{CN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right).$

2. $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac}$.

$$\left|\overrightarrow{PN}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PN}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}} =$$

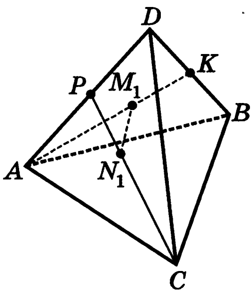
$$= \left(\frac{1}{4}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|^2-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}|\vec{b}||\vec{c}|\cos 60^\circ - \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{c}|\cos 60^\circ\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{4}t^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}t,$$

значит $\boxed{PN = \frac{\sqrt{2}}{2}t}$.

д*) Найдем расстояние между скрещивающимися медианами граней правильного тетраэдра $DABC$ $\rho(CP; AK)$.



1. Выразим векторы $\overrightarrow{CP}$ и $\overrightarrow{AK}$ через базисные векторы:

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AP} = -\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}.$$

2. Так как $\rho(CP; AK) = M_1N_1$,

где $\begin{cases} M_1N_1 \perp CP \\ M_1N_1 \perp AK \end{cases}$, то $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} \perp \overrightarrow{CP} \\ \overrightarrow{M_1N_1} \perp \overrightarrow{AK} \end{cases}$.

Значит $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1}\cdot\overrightarrow{CP} = 0 \\ \overrightarrow{M_1N_1}\cdot\overrightarrow{AK} = 0 \end{cases}$ $\left(M_1N_1 = \left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|\right)$.

$$\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_1A}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN_1}.$$

Положим $\overrightarrow{M_1A} = x\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{CN_1} = y\overrightarrow{CP}$.

Тогда $\overrightarrow{M_1N_1} = x\overrightarrow{AK} + \overrightarrow{AC} + y\overrightarrow{CP} =$
$= x \cdot \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} + y\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)$,

т. е. $\overrightarrow{M_1N_1} = \frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + (1-y)\vec{c}$.

3. $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 \\ \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{AK} = 0 \end{cases}$, следовательно

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + (1-y)\vec{c}\right)\left(-\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}x\vec{b} + (1-y)\vec{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(x+y)\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}x\vec{b}\cdot\vec{c} - (1-y)\vec{c}^2 + \frac{1}{4}(x+y)\vec{a}^2 + \\ \qquad + \frac{1}{4}x\vec{b}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}(x-y)\vec{c}\cdot\vec{a} = 0 \\ \frac{1}{2}(x+y)\vec{a}^2 + \frac{1}{2}x\vec{b}\cdot\vec{a} + (1-y)\vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}(x+y)\vec{a}\cdot\vec{b} + \\ \qquad + \frac{1}{2}x\vec{b}^2 + (1-y)\vec{c}\cdot\vec{b} = 0 \end{cases}.$$

Учтем, что

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cdot 60^\circ = \frac{1}{2}t^2$;

$\vec{b}\cdot\vec{c} = |\vec{b}||\vec{c}| \cdot 60^\circ = \frac{1}{2}t^2$;

$\vec{a}\cdot\vec{c} = |\vec{a}||\vec{c}| \cdot 60^\circ = \frac{1}{2}t^2$,

тогда

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}(x+y)\cdot\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{4}xt^2 - (1-y)t^2 + \frac{1}{4}(x+y)t^2 + \\ \qquad + \frac{1}{8}xt^2 + \frac{1}{4}(1-y)t^2 = 0 \\ \frac{1}{2}(x+y)t^2 + \frac{1}{4}xt^2 + \frac{1}{2}(1-y)t^2 + \frac{1}{4}(x+y)t^2 + \\ \qquad + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{2}(1-y)t^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2(x+y)-2x-8(1-y)+2(x+y)+x+2(1-y)=0 \\ 2(x+y)+x+2(1-y)+(x+y)+2x+2(1-y)=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -x+6y-6=0 \\ 6x-y+4=0 \quad \cdot 6 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x+6y-6=0 \\ 36x-6y+24=0 \end{cases};$$

$$35x=-18; \quad x=-\frac{18}{35}; \quad \begin{cases} y=6x+4 \\ x=-\dfrac{18}{35} \end{cases}; \quad \begin{cases} y=\dfrac{32}{35} \\ x=-\dfrac{18}{35} \end{cases}.$$

Подставляя найденные значения x и y в вектор $\overrightarrow{M_1N_1}=\frac{1}{2}(x+y)\vec{a}+\frac{1}{2}x\vec{b}+(1-y)\vec{c}$,

получим $\overrightarrow{M_1N_1}=\frac{7}{35}\vec{a}-\frac{9}{35}\vec{b}+\frac{3}{35}\vec{c}$.

$$\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|=\frac{1}{35}\sqrt{\left(7\vec{a}-9\vec{b}+3\vec{c}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{35}\sqrt{49\vec{a}^2+81\vec{b}^2+9\vec{c}^2-126\vec{a}\cdot\vec{b}-54\vec{b}\cdot\vec{c}+42\vec{a}\cdot\vec{c}}=$$

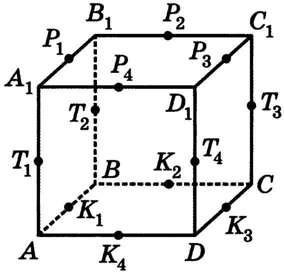
$$=\frac{1}{35}\sqrt{49t^2+81t^2+9t^2-63t^2-27t^2+21t^2}=\frac{\sqrt{70}}{35}t,$$

т. е. $\rho(CP;AK)=\boxed{\dfrac{\sqrt{70}}{35}t}$.

Тренировочная работа 7 (Использование скалярного произведения для нахождения углов и расстояний)

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m. P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.

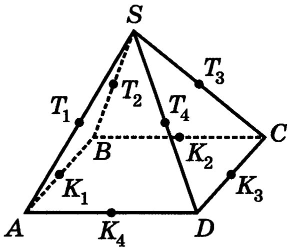


Полагая, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, найдите:

а) $\left(\widehat{AP_4; DP_3}\right)$; б) $\left(\widehat{DT_2; K_4C_1}\right)$;

в) $\left(\widehat{P_1T_3; K_1P_2}\right)$; г*) $\rho\,(AP_4; DP_3)$.

2. $SABCD$ — пирамида, все ребра которой равны m. T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



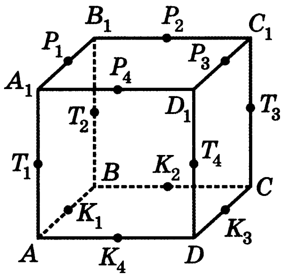
Полагая, что $\overrightarrow{AS} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, найдите:

а) $\rho\,(K_4; T_3)$; б) $\left(\widehat{T_4A; DT_3}\right)$;

в) $\left(\widehat{SK_4; T_1C}\right)$; г*) $\rho\,(K_4T_4; K_3T_3)$.

Вариант 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m.
P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.

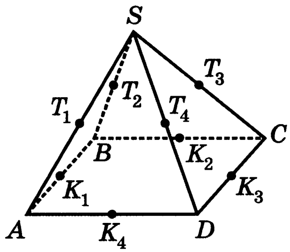


Полагая, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, найдите:

а) $\left(\widehat{AP_1; BP_2}\right)$;   б) $\left(\widehat{CT_1; K_3A_1}\right)$;

в) $\left(\widehat{K_1P_2; T_2K_4}\right)$;   г*) $\rho\,(A_1T_4; CP_3)$.

2. $SABCD$ — пирамида, все ребра которой равны m.
T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Полагая, что $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DS} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, найдите:

а) $\rho\,(K_3; T_1)$;   б) $\left(\widehat{DT_1; AT_2}\right)$;

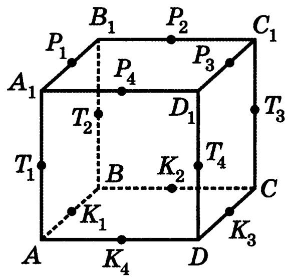
в) $\left(\widehat{K_2S; T_2D}\right)$;   г*) $\rho\,(K_1T_1; T_2K_2)$.

Решение тренировочной работы 7

Вариант 1

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m.

P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Полагая, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, найдите:

а) $\left(\widehat{AP_4; DP_3}\right)$;   б) $\left(\widehat{DT_2; K_4C_1}\right)$;

в) $\left(\widehat{P_1T_3; K_1P_2}\right)$;   г*) $\rho\,(AP_4; DP_3)$.

По условию $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$,

тогда $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$,

т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

а) Найдем $\left(\widehat{AP_4; DP_3}\right)$.

1. $\overrightarrow{AP_4} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P_4} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{DP_3} = \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{D_1P_3} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$.

2. $\left|\overrightarrow{AP_4}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + \dfrac{1}{4}\vec{c}^2} =$

$= \sqrt{m^2 + \dfrac{1}{4}m^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}m.$

$\left|\overrightarrow{DP_3}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \dfrac{1}{4}\vec{b}^2} =$

$= \sqrt{m^2 + \dfrac{1}{4}m^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}m.$

3. $\overrightarrow{AP_4} \cdot \overrightarrow{DP_3} = \left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right) =$

$= \vec{a}^2 + \dfrac{1}{2}\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} + \dfrac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \dfrac{1}{4}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} = m^2.$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP_4}; \overrightarrow{DP_3}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AP_4}\cdot\overrightarrow{DP_3}}{\left|\overrightarrow{AP_4}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DP_3}\right|} = \dfrac{m^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)^2} = \dfrac{4}{5},$

тогда $\boxed{\left(\widehat{AP_4; DP_3}\right) = \arccos\dfrac{4}{5}}.$

б) Найдем $\left(\widehat{DT_2; K_4C_1}\right)$.

1. $\overrightarrow{DT_2} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BT_2} = -\vec{c} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{a};$

$\overrightarrow{K_4C_1} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} = \dfrac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \vec{a}.$

2. $\left|\overrightarrow{DT_2}\right| = \sqrt{\left(-\vec{c} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{a}\right)^2} =$

$= \sqrt{\vec{c}^2 + \vec{b}^2 + \dfrac{1}{4}\vec{a}^2 - 2\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} - \underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} + \underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}} =$

$= \sqrt{m^2 + m^2 + \dfrac{1}{4}m^2} = \dfrac{3}{2}m.$

$$\left|\overrightarrow{K_4C_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2+\vec{b}^2+\vec{a}^2+\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}+2\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}m^2+m^2+m^2} = \frac{3}{2}m.$$

3. $$\overrightarrow{DT_2}\cdot\overrightarrow{K_4C_1} = \left(-\vec{c}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{b}+\vec{a}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{c}^2+\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{4}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}-\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}+\vec{b}^2+$$

$$+\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}-\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}+\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\frac{1}{2}\vec{a}^2 = m^2.$$

4. $$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DT_2};\overrightarrow{K_4C_1}}\right) = \frac{\overrightarrow{DT_2}\cdot\overrightarrow{K_4C_1}}{\left|\overrightarrow{DT_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{K_4C_1}\right|} = \frac{m^2}{\left(\frac{3}{2}m\right)^2} = \frac{4}{9},$$

тогда $\boxed{\left(\widehat{DT_2;K_4C_1}\right) = \arccos\frac{4}{9}}$.

в) Найдем $\left(\widehat{P_1T_3;K_1P_2}\right)$.

1. $$\overrightarrow{P_1T_3} = \overrightarrow{P_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{C_1T_3} = \frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a};$$

$$\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_1B}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1P_2} = \frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}.$$

2. $$\left|\overrightarrow{P_1T_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2+\vec{c}^2+\frac{1}{4}\vec{a}^2+\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}-\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}-\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}m.$$

$$\left|\overrightarrow{K_1P_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2+\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2+\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}m.$$

3. $\overrightarrow{P_1T_3}\cdot\overrightarrow{K_1P_2} = \left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right) =$

$= \frac{1}{4}\vec{b}^2+\frac{1}{2}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}-\frac{1}{4}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}-$

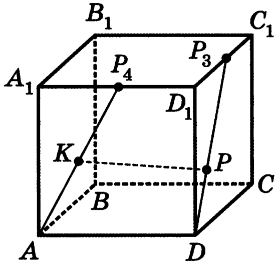
$-\frac{1}{2}\vec{a}^2+\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{2}\vec{c}^2-\frac{1}{4}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}=\frac{m^2}{4}.$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{P_1T_3};\overrightarrow{K_1P_2}}\right)=\frac{\overrightarrow{P_1T_3}\cdot\overrightarrow{K_1P_2}}{\left|\overrightarrow{P_1T_3}\right|\cdot\left|\overrightarrow{K_1P_2}\right|}=\frac{\frac{m^2}{4}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}m\right)^2}=\frac{1}{6},$

тогда $\boxed{\left(P_1\widehat{T_3;K_1}P_2\right)=\arccos\frac{1}{6}}$.

г*) Найдем $\rho(AP_4;DP_3)$.

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m.



$\overrightarrow{AP_4}=\overrightarrow{AA_1}+\overrightarrow{A_1P_4}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c};$

$\overrightarrow{DP_3}=\overrightarrow{DD_1}+\overrightarrow{D_1P_3}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b};$

$\overrightarrow{KP}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}.$

Положим $\overrightarrow{KA}=x\overrightarrow{AP_4}$; $\overrightarrow{DP}=y\overrightarrow{DP_3}$, тогда

$\overrightarrow{KP}=x\overrightarrow{AP_4}+\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{DP_3}=x\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)+\vec{c}+y\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right),$

т. е. $\overrightarrow{KP}=(x+y)\vec{a}+\frac{1}{2}y\vec{b}+\left(1+\frac{x}{2}\right)\vec{c}.$

Так как $\rho(AP_4; DP_3) = KP$, если $\begin{cases} KP \perp AP_4 \\ KP \perp DP_3 \end{cases}$,

значит $\begin{cases} \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{AP_4} = 0 \\ \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{DP_3} \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} \left((x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}y\vec{b} + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) = 0 \\ \left((x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}y\vec{b} + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+y)\vec{a}^2 + \frac{1}{2}y\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} + \frac{1}{2}(x+y)\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + \\ \qquad + \frac{1}{4}y\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)\vec{c}^2 = 0 \\ (x+y)\vec{a}^2 + \frac{1}{2}y\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} + \left(1 + \frac{1}{2}x\right)\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} + \frac{1}{2}(x+y)\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \\ \qquad + \frac{1}{4}y\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+y)m^2 + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2}\right)m^2 = 0 \\ (x+y)m^2 + \frac{1}{4}ym^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4(x+y) + 2 + x = 0 \\ 4(x+y) + y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5x + 4y = -2 \\ 4x + 5y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\frac{10}{9} \\ y = \frac{8}{9} \end{cases}.$$

Подставляя значения x и y в вектор $\overrightarrow{KP}$, получим:

$$\overrightarrow{KP} = -\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}; \quad \left|\overrightarrow{KP}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{9}\vec{a} + \frac{4}{9}\vec{b} + \frac{4}{9}\vec{c}\right)^2} =$$

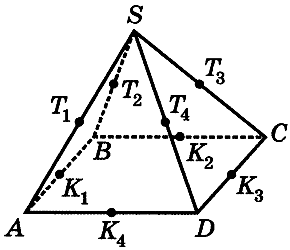
$$= \frac{1}{9}\sqrt{4\vec{a}^2 + 16\vec{b}^2 + 16\vec{c}^2 - 16\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + 32\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} - 16\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}} =$$

$$= \frac{1}{9}\sqrt{4m^2 + 16m^2 + 16m^2} = \frac{6}{9}m = \frac{2}{3}m,$$

т. е. $\boxed{\rho(AP_4; DP_3) = \frac{2}{3}m}$.

2. $SABCD$ — пирамида, все ребра которой равны m. T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.

Найдите:



а) $\rho\left(K_4; T_3\right)$;

б) $\left(\widehat{T_4A; DT_3}\right)$;

в) $\left(\widehat{SK_4; T_1C}\right)$;

г*) $\rho\left(K_4T_4; K_3T_3\right)$.

По условию $\overrightarrow{AS} = \vec{a}$, $\quad \overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\quad \overrightarrow{AD} = \vec{c}$,

$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = m$, $\quad \left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = 60^\circ$, $\quad \vec{b} \perp \vec{c}$.

Следовательно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} m^2$;

$\vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot |\vec{c}| \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2} m^2$; $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

а) Найдем $\rho\left(K_4; T_3\right)$.

$$\overrightarrow{K_4T_3} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CT_3} = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}\right) = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b},$$

где $\overrightarrow{CS} = \overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC} = \vec{a} - \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$;

$$\left|\overrightarrow{K_4K_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{3}}{2} m,$$

тогда $\boxed{\rho\left(K_4; T_3\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} m}$.

б) Найдем $\left(\widehat{T_4A; DT_3}\right)$.

1. $\overrightarrow{T_4A} = \overrightarrow{T_4D} + \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AS}\right) + \overrightarrow{DA} =$

$= \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}) - \vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c};$

$\overrightarrow{DT_3} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CT_3} = \vec{b} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AC}\right) =$

$= \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\left(\vec{b} + \vec{c}\right) =$

$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c},$

т. е. $\overrightarrow{T_4A} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$ и $\overrightarrow{DT_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$.

2. $\left|\overrightarrow{T_4A}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c}^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos 60^\circ + \frac{1}{4}|\vec{c}|^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m.$

$\left|\overrightarrow{DT_3}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} - 2\vec{a}\cdot\vec{c} - 2\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}} =$

$= \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + m^2 + m^2 + m^2 - m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m.$

3. $\overrightarrow{T_4A}\cdot\overrightarrow{DT_3} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) =$

$= -\frac{1}{4}\left(\vec{a}^2 + \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{a}\cdot\vec{b} + \underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} - \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{c}^2\right) =$

$= -\frac{1}{4}\left(m^2 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m^2 - m^2\right) = -\frac{1}{8}m^2.$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{T_4A};\overrightarrow{DT_3}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{T_4A}\cdot\overrightarrow{DT_3}}{\left|\overrightarrow{T_4A}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DT_3}\right|}=\dfrac{-\frac{1}{8}m^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2}=-\dfrac{1}{6}$,

т. е. $\left(\widehat{\overrightarrow{T_4A};\overrightarrow{DT_3}}\right)=\arccos\left(-\dfrac{1}{6}\right)=\pi-\arccos\dfrac{1}{6}$.

Итак, $\left(\widehat{\overrightarrow{T_4A};\overrightarrow{DT_3}}\right)=\pi-\arccos\dfrac{1}{6}>90^\circ$,

тогда $\boxed{\left(\widehat{T_4A;DT_3}\right)=\arccos\dfrac{1}{6}}$.

в) Найдем $\left(\widehat{SK_4;T_1C}\right)$.

1. $\overrightarrow{SK_4}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AK_4}=-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$;

$\overrightarrow{T_1C}=\overrightarrow{T_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$.

2. $\left|\overrightarrow{SK_4}\right|=\sqrt{\left(-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{4}\vec{c}^2}=$

$=\sqrt{m^2-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{4}m^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}m$;

$\left|\overrightarrow{T_1C}\right|=\sqrt{\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}\right)^2}=$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{c}^2+\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+2\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}-\vec{a}\cdot\vec{b}}=$

$=\sqrt{\dfrac{1}{4}m^2+m^2+m^2-\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}m^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}m$.

3. $\overrightarrow{SK_4}\cdot\overrightarrow{T_1C}=\left(-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}\right)=$

$=\dfrac{1}{2}\vec{c}^2-\dfrac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}-\vec{a}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\dfrac{1}{2}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}=$

$=\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{8}m^2-\dfrac{1}{2}m^2+\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}m^2=-\dfrac{1}{8}m^2$.

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SK_4};\overrightarrow{T_1C}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{SK_4}\cdot\overrightarrow{T_1C}}{\left|\overrightarrow{SK_4}\right|\cdot\left|\overrightarrow{T_1C}\right|} = \dfrac{-\frac{1}{8}m^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}m^2} = -\dfrac{\sqrt{15}}{30}$,

т. е. $\left(\widehat{\overrightarrow{SK_4};\overrightarrow{T_1C}}\right) = \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{30}\right) > \dfrac{\pi}{2}$.

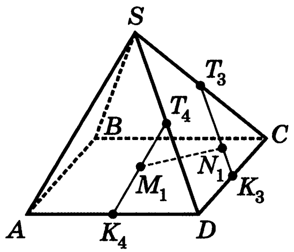
Но $0 < \left(\widehat{SK_4;T_1C}\right) \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, поэтому, учитывая, что

$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{30}\right) = \pi - \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{30}$

и $\left(\widehat{\overrightarrow{SK_4};\overrightarrow{T_1C}}\right) = \pi - \arccos\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{30}\right)$,

$\left(\widehat{SK_4;T_1C}\right) = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{30}$.

г*) Найдем $\rho\,(K_4T_4;K_3T_3)$.



$\rho\,(K_4T_4;K_3T_3) = M_1N_1$,

где $M_1N_1 \perp K_4T_4$ и $M_1N_1 \perp K_3T_3$.

1. $\overrightarrow{K_4T_4} = \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DT_4} = \dfrac{1}{2}\vec{c} + \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AD}\right) =$

$= \dfrac{1}{2}\vec{c} + \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c} = \dfrac{1}{2}\vec{a}$.

$\overrightarrow{K_3T_3} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{DS} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

2. $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_1K_4} + \overrightarrow{K_4D} + \overrightarrow{DK_3} + \overrightarrow{K_3N_1}$.

Положим $\overrightarrow{M_1K_4} = x\overrightarrow{K_4T_4}$, $\overrightarrow{K_3N_1} = y\overrightarrow{K_3T_3}$, тогда

$$\overrightarrow{M_1N_1} = x\overrightarrow{K_4T_4} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + y\overrightarrow{K_3T_3} =$$

$$= x \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} + y\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(1-y)\vec{c},$$

т. е. $\overrightarrow{M_1N_1} = \frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(1-y)\vec{c}$.

3. Так как $\begin{cases} M_1N_1 \perp K_4T_4 \\ M_1N_1 \perp K_3T_3 \end{cases}$, то $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{K_4T_4} = 0 \\ \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{K_3T_3} = 0 \end{cases}$,

значит

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(1-y)\vec{c}\right) \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = 0 \\ \left(\frac{1}{2}(x+y)\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}(1-y)\vec{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}\right) = 0 \end{cases}.$$

Для упрощения умножим обе части уравнения на 4.

$$\begin{cases} (x+y)\vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + (1-y)\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \\ (x+y)\vec{a}^2 + \vec{b} \cdot \vec{a} + (1-y)\vec{c} \cdot \vec{a} - (x+y)\vec{a} \cdot \vec{c} - \\ \qquad - \vec{b} \cdot \vec{c} - (1-y)\vec{c}^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} (x+y)m^2 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}(1-y)m^2 = 0 \\ (x+y)m^2 + \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{2}(1-y)m^2 - \\ \qquad - \frac{1}{2}(x+y)m^2 - (1-y)m^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2(x+y) + 1 + (1-y) = 0 \\ 2(x+y) + 1 + (1-y) - (x+y) - 2(1-y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \frac{2}{3} \\ x = -\frac{4}{3} \end{cases};$$

$$\overrightarrow{M_1N_1} = -\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{6}\vec{c} = \frac{1}{6}\left(-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}\right);$$

$$\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{6}\left(-2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{6}\sqrt{4\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 + \vec{c}^2 - 12\vec{a}\cdot\vec{b} + 6\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} - 4\vec{a}\cdot\vec{c}} =$$

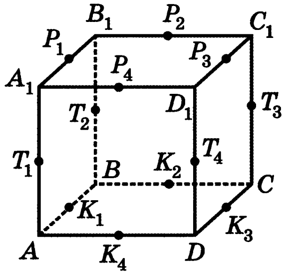
$$= \frac{1}{6}\sqrt{4m^2 + 9m^2 + m^2 - 6m^2 - 2m^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}m,$$

т. е. $\boxed{\rho\,(K_4T_4; K_3T_3) = \frac{\sqrt{6}}{6}m}$.

Вариант 2

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m.

P_1, P_2, P_3, P_4, T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Полагая, что $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$, найдите:

а) $\left(\widehat{AP_1; BP_2}\right)$; б) $\left(\widehat{CT_1; K_3A_1}\right)$;

в) $\left(\widehat{K_1P_2; T_2K_4}\right)$; г*) $\rho(A_1T_4; CP_3)$.

По условию $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Тогда $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \perp \vec{c}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, т. е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$.

а) Найдем $\left(\widehat{AP_1; BP_2}\right)$.

1. $\overrightarrow{AP_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1P_1} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$;

$\overrightarrow{BP_2} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1P_2} = \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{c}$.

2. $\left|\overrightarrow{AP_1}\right| = \sqrt{\left(\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \dfrac{1}{4}\vec{b}^2} =$

$= \sqrt{m^2 + \dfrac{1}{4}m^2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}m.$

$$\left|\overrightarrow{BP_2}\right| = \sqrt{\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} = \sqrt{\vec{a}^2+\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{4}\vec{c}^2} =$$
$$= \sqrt{m^2+\frac{1}{4}m^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}m.$$

Напомним, что подчеркнутые скалярные произведения равны нулю.

3. $$\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{BP_2} = \left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right) =$$
$$= \vec{a}^2+\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{4}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} = m^2.$$

4. $$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP_1};\overrightarrow{BP_2}}\right) = \frac{\overrightarrow{AP_1}\cdot\overrightarrow{BP_2}}{\left|\overrightarrow{AP_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BP_2}\right|} = \frac{m^2}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2}m\right)^2} = \frac{4}{5},$$

т. е. $\boxed{\left(\widehat{AP_1;BP_2}\right) = \arccos\frac{4}{5}}$.

б) Найдем $\left(\widehat{CT_1;K_3A_1}\right)$.

1. $$\overrightarrow{CT_1} = \overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AT_1} = -\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a};$$
$$\overrightarrow{K_3A_1} = \overrightarrow{K_3D}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AA_1} = -\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}+\vec{a}.$$

2. $$\left|\overrightarrow{CT_1}\right| = \sqrt{\left(-\vec{b}-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)^2} =$$
$$= \sqrt{\vec{b}^2+\vec{c}^2+\frac{1}{4}\vec{a}^2+2\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}-\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}-\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}} =$$
$$= \sqrt{m^2+m^2+\frac{1}{4}m^2} = \frac{3}{2}m.$$

$$\left|\overrightarrow{K_3A_1}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} - \underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} - 2\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + m^2 + m^2} = \frac{3}{2}m.$$

3. $\overrightarrow{CT_1}\cdot\overrightarrow{K_3A_1} = \left(-\vec{b} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}\right) =$

$$= \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} - \frac{1}{4}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + \underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} + \vec{c}^2 - \frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} - \underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} -$$

$$- \underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} + \frac{1}{2}\vec{a}^2 = 2m^2.$$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CT_1}; \overrightarrow{K_3A_1}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{CT_1}\cdot\overrightarrow{K_3A_1}}{\left|\overrightarrow{CT_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{K_3A_1}\right|} = \dfrac{2m^2}{\left(\frac{3}{2}m\right)^2} = \dfrac{8}{9}$,

т. е. $\boxed{\left(\widehat{CT_1; K_3A_1}\right) = \arccos\frac{8}{9}}$.

в) Найдем $\left(\widehat{K_1P_2; T_2K_4}\right)$.

1. $\overrightarrow{K_1P_2} = \overrightarrow{K_1B} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1P_2} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c};$

$\overrightarrow{T_2K_4} = \overrightarrow{T_2B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK_4} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$

2. $\left|\overrightarrow{K_1P_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{b}^2 + \vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c}^2 + \underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} + \underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + \frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}m.$$

$$\left|\overrightarrow{T_2K_4}\right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \frac{1}{4}\vec{c}^2 + \underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} + \frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}} = \frac{\sqrt{6}}{2}m.$$

3. $\overrightarrow{K_1P_2}\cdot\overrightarrow{T_2K_4}=\left(\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=$

$$=-\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}-\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{4}\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}-\frac{1}{2}\vec{b}^2-\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}-\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+$$

$$+\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{4}\vec{c}^2=$$

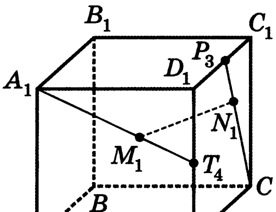
$$=-\frac{1}{2}m^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{4}m^2=-\frac{3}{4}m^2.$$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{K_1P_2};\overrightarrow{T_2K_4}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{K_1P_2}\cdot\overrightarrow{T_2K_4}}{\left|\overrightarrow{K_1P_2}\right|\cdot\left|\overrightarrow{T_2K_4}\right|}=$

$$=\frac{-\frac{3}{4}m^2}{\frac{\sqrt{6}}{2}m\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}m}=-\frac{1}{2},\text{ т. е. }\left(\widehat{\overrightarrow{K_1P_2};\overrightarrow{T_2K_4}}\right)=120^\circ,$$

тогда $\boxed{\left(\widehat{K_1P_2;T_2K_4}\right)=60^\circ}$.

г*) Найдем $\rho(A_1T_4;CP_3)$.



Напомним, что $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, ребра которого равны m,

$\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$.

1. $\overrightarrow{A_1T_4}=\overrightarrow{A_1D_1}+\overrightarrow{D_1T_4}=\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a};$

$\overrightarrow{CP_3}=\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1P_3}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}.$

2. $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_1T_4} + \overrightarrow{T_4D} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN_1}$.

Положим $\overrightarrow{M_1T_4} = x\overrightarrow{A_1T_4}$; $\overrightarrow{CN_1} = y\overrightarrow{CP_3}$, тогда

$$\overrightarrow{M_1N_1} = x\overrightarrow{A_1T_4} - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + y\overrightarrow{CP_3} =$$

$$= x\left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) - \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + y\left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right),$$

т. е. $\overrightarrow{M_1N_1} = \left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)\vec{b} + x\vec{c}$.

Так как $\rho(A_1T_4; CP_3) = M_1N_1$,

если $\begin{cases} M_1N_1 \perp A_1T_4 \\ M_1N_1 \perp CP_3 \end{cases}$; $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{A_1T_4} = 0 \\ \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{CP_3} = 0 \end{cases}$, тогда

$$\begin{cases} \left(\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)\vec{b} + x\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) = 0 \\ \left(\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)\vec{b} + x\vec{c}\right) \cdot \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} \left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} + x\vec{c}^2 - \\ -\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{a}^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}y\right)\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \frac{1}{2}x\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}} = 0 \\ \left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\vec{a}^2 + \left(1 - \frac{1}{2}y\right)\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} + x\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} - \\ -\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}y\right)\vec{b}^2 - \frac{1}{2}x\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} xm^2 - \frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)m^2 = 0 \\ \left(y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\right)m^2 - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}y\right)m^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 2x - y + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 0 \\ 2y - x - 1 - 1 + \frac{1}{2}y = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 4x - 2y + x + 1 = 0 \\ 4y - 2x - 4 + y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5x - 2y + 1 = 0 \;|\cdot 2 \\ 5y - 2x - 4 = 0 \;|\cdot 5 \end{cases}; \quad \begin{cases} 10x - 4y + 2 = 0 \\ -10x + 25y - 20 = 0 \end{cases};$$

$$21y = 18; \quad y = \frac{6}{7}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{6}{7} \\ 5x - \dfrac{12}{7} + 1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y = \dfrac{6}{7} \\ x = \dfrac{1}{7} \end{cases}.$$

Тогда $\overrightarrow{M_1N_1} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{4}{7}\vec{b} + \frac{1}{7}\vec{c}$,

т. е. $\overrightarrow{M_1N_1} = \frac{1}{7}\left(2\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}\right)$.

3. $\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| = \frac{1}{7}\sqrt{\left(2\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c}\right)^2} =$

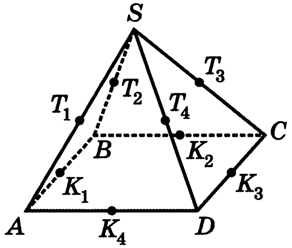
$= \frac{1}{7}\sqrt{4\vec{a}^2 + 16\vec{b}^2 + \vec{c}^2 + 16\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}} + 8\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}} + 4\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}} =$

$= \frac{1}{7}\sqrt{4m^2 + 16m^2 + m^2} = \frac{\sqrt{21}}{7}m.$

Итак, $\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right| = \frac{\sqrt{21}}{7}m$,

значит $\boxed{\rho\,(A_1T_4; CP_3) = \frac{\sqrt{21}}{7}m}$.

2. $SABCD$ — пирамида, все ребра которой равны m. T_1, T_2, T_3, T_4, K_1, K_2, K_3, K_4 — середины ребер.



Полагая, что $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DS} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$, найдите:

а) $\rho\,(K_3; T_1)$;

б) $\left(\widehat{DT_1; AT_2}\right)$;

в) $\left(\widehat{K_2S; T_2D}\right)$;

г*) $\rho\,(K_1T_1; T_2K_2)$.

а) Найдем $\rho(K_3; T_1)$.

$$\overrightarrow{K_3T_1} = \overrightarrow{K_3D} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AT_1} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DA}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

$$\left|\overrightarrow{K_3T_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{K_3T_1}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2 + \frac{1}{4}\vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{b}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 + \frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

$\left(\rho(K_3; T_1) = \left|\overrightarrow{K_3T_1}\right|\right)$. Тогда $\boxed{\rho(K_3; T_1) = \frac{\sqrt{3}}{2}m}$.

б) Найдем $\left(\widehat{DT_1; AT_2}\right)$.

1. $\overrightarrow{DT_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DS}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$;

$$\overrightarrow{AT_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right) \quad \left(\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\right).$$

2. $\left|\overrightarrow{DT_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2} =$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + m^2 + m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m;$$

$$\left|\overrightarrow{AT_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{a} + \vec{c}\right)\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\vec{b}^2 + \vec{a}^2 + \vec{c}^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{a} - 2\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + 2\vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{m^2 + m^2 + m^2 - m^2 + m^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}m.$$

3. $\overrightarrow{DT_1}\cdot\overrightarrow{AT_2}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\vec{b}-\vec{a}+\vec{c}\right)=$

$=\frac{1}{4}\left(\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\vec{b}^2-\vec{a}^2-\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+\vec{b}\cdot\vec{c}\right)=$

$=m^2-m^2+\frac{1}{2}m^2=\frac{1}{2}m^2.$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{DT_1};\overrightarrow{AT_2}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{DT_1}\cdot\overrightarrow{AT_2}}{\left|\overrightarrow{DT_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AT_2}\right|}=\dfrac{\frac{1}{2}m^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}m\right)^2}=\dfrac{2}{3},$

тогда $\boxed{\left(\widehat{DT_1;AT_2}\right)=\arccos\frac{2}{3}}.$

в) Найдем $\left(\widehat{K_2S;T_2D}\right)$.

1. $\overrightarrow{K_2S}=\overrightarrow{K_2C}+\overrightarrow{CS}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c};$

$\overrightarrow{T_2D}=\overrightarrow{T_2B}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}\right)-\vec{a}-\vec{c}=$

$=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\left(\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{DA}\right)\right)-\vec{a}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}\right)-\vec{a}-\vec{c}=$

$=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{a}-\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}=\overrightarrow{T_2D}.$

2. $\left|\overrightarrow{K_2S}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)^2}=$

$=\sqrt{\frac{1}{4}\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}-2\vec{b}\cdot\vec{c}}=$

$=\sqrt{\frac{1}{4}m^2+m^2+m^2-\frac{1}{2}m^2-m^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}m.$

$\left|\overrightarrow{T_2D}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)^2}=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{\vec{c}^2+\vec{b}^2+\vec{a}^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}+2\vec{a}\cdot\vec{b}}=$

$=\frac{1}{2}\sqrt{m^2+m^2+m^2+m^2+0+m^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}m.$

3. $\overrightarrow{K_2S}\cdot\overrightarrow{T_2D}=\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}\right)=$

$=\frac{1}{4}\vec{a}\cdot\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{b}^2+\frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{b}+\frac{1}{4}\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}}-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}+$

$+\frac{1}{2}\vec{c}^2+\frac{1}{4}\vec{a}^2-\frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}=$

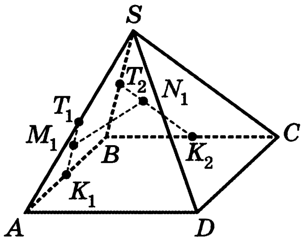
$=\frac{1}{8}m^2-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{4}m^2+\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{4}m^2-\frac{1}{4}m^2=\frac{1}{8}m^2.$

4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{K_2S};\overrightarrow{T_2D}}\right)=\dfrac{\overrightarrow{K_2S}\cdot\overrightarrow{T_2D}}{\left|\overrightarrow{K_2S}\right|\cdot\left|\overrightarrow{T_2D}\right|}=\dfrac{\frac{1}{8}m^2}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}m^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{30},$

тогда $\boxed{\left(\widehat{K_2S;T_2D}\right)=\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{30}}.$

г*) Найдем $\rho\,(K_1T_1;T_2K_2)$.

1. Напомним, что по условию $\overrightarrow{DA}=\vec{a},\ \overrightarrow{DS}=\vec{b},\ \overrightarrow{DC}=\vec{c},$ а все ребра пирамиды имеют длину m.



$\rho\,(K_1T_1;T_2K_2)=M_1N_1,$

если $\begin{cases}M_1N_1\perp T_1K_1\\ M_1N_1\perp T_2K_2\end{cases}.$

$\overrightarrow{K_1T_1}=\overrightarrow{K_1A}+\overrightarrow{AT_1}=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AS}=$

$=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{DA}\right)=-\frac{1}{2}\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a};$

$\overrightarrow{T_2K_2}=\overrightarrow{T_2B}+\overrightarrow{BK_2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SB}-\frac{1}{2}\vec{a}=$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\left(\overrightarrow{DS}-\overrightarrow{DA}\right)\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=$

$=\frac{1}{2}\left(\vec{c}-\vec{b}+\vec{a}\right)-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{b}.$

2. $\overrightarrow{M_1N_1} = \overrightarrow{M_1K_1} + \overrightarrow{K_1B} + \overrightarrow{BK_2} + \overrightarrow{K_2N_1}$.

Положим $\overrightarrow{M_1K_1} = x\overrightarrow{K_1T_1}$, $\overrightarrow{K_2N_1} = y\overrightarrow{T_2K_2}$, тогда

$$\overrightarrow{M_1N_1} = x\overrightarrow{K_1T_1} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + y\overrightarrow{T_2K_2} =$$
$$= x\left(-\frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} + y\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}(y - x + 1)\vec{c} + \frac{1}{2}(x - y)\vec{b} - \frac{1}{2}(x + 1)\vec{a}.$$

3. Так как $\begin{cases} M_1N_1 \perp T_1K_1 \\ M_1N_1 \perp T_2K_2 \end{cases}$, то $\begin{cases} \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{T_1K_1} = 0 \\ \overrightarrow{M_1N_1} \cdot \overrightarrow{T_2K_2} = 0 \end{cases}$,

значит

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}(y - x + 1)\vec{c} + \frac{1}{2}(x - y)\vec{b} - \frac{1}{2}(x + 1)\vec{a}\right) \times \\ \qquad \times \frac{1}{2}\left(-\vec{c} + \vec{b} - \vec{a}\right) = 0 \\ \left(\frac{1}{2}(y - x + 1)\vec{c} + \frac{1}{2}(x - y)\vec{b} - \frac{1}{2}(x + 1)\vec{a}\right) \times \\ \qquad \times \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right) = 0 \end{cases}.$$

Для удобства не будем записывать слагаемые, содержащие $\vec{a} \cdot \vec{c}$, так как они равны нулю. Упростим также все коэффициенты, мысленно умножив обе части уравнений на 4. Тогда

$$\begin{cases} -(y - x + 1)\vec{c}^2 - (x - y)\vec{b} \cdot \vec{c} + (y - x + 1)\vec{c} \cdot \vec{b} + \\ \quad + (x - y)\vec{b}^2 - (x + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} - (x - y)\vec{b} \cdot \vec{a} + (x + 1)\vec{a}^2 = 0 \\ (y - x + 1)\vec{c}^2 + (x - y)\vec{b} \cdot \vec{c} - (y - x + 1)\vec{c} \cdot \vec{b} - \\ \quad -(x - y)\vec{b}^2 + (x + 1)\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -(y - x + 1)m^2 - \frac{1}{2}(x - y)m^2 + \frac{1}{2}(y - x + 1)m^2 + \\ \quad + (x - y)m^2 - \frac{1}{2}(x + 1)m^2 - \frac{1}{2}(x - y)m^2 + (x + 1)m^2 = 0 \\ (y - x + 1)m^2 + \frac{1}{2}(x - y)m^2 - \frac{1}{2}(y - x + 1)m^2 - \\ \quad -(x - y)m^2 + \frac{1}{2}(x + 1)m^2 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2(y-x+1)-(x-y)+(y-x+1)+ \\ \quad +2(x-y)-(x+1)-(x-y)+2(x+1)=0 \\ 2(y-x+1)+(x-y)-(y-x+1)- \\ \quad -2(x-y)+x+1=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -y+2x=0 \\ 2y-x+2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=2x \\ 4x-x+2=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-\dfrac{4}{3} \\ x=-\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Напомним, что

$$\overrightarrow{M_1N_1}=\frac{1}{2}(y-x+1)\vec{c}+\frac{1}{2}(x-y)\vec{b}-\frac{1}{2}(x+1)\vec{a}.$$

Тогда $\overrightarrow{M_1N_1}=$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3}+\frac{2}{3}+1\right)\vec{c}+\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)\vec{b}-\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}+1\right)\vec{a}=$$

$$=\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}.$$

$$\left|\overrightarrow{M_1N_1}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{1}{6}\vec{a}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{36}\vec{c}^2+\frac{1}{9}\vec{b}^2+\frac{1}{36}\vec{a}^2+\frac{1}{9}\vec{c}\cdot\vec{b}-\frac{1}{9}\vec{b}\cdot\vec{a}-\frac{1}{18}\underline{\vec{c}\cdot\vec{a}}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1}{36}m^2+\frac{1}{9}m^2+\frac{1}{36}m^2+\frac{1}{18}m^2-\frac{1}{18}m^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}m,$$

где $\vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}m^2$,

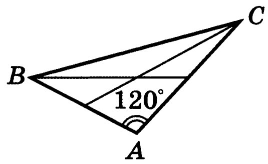
$\vec{c}\cdot\vec{b}=|\vec{c}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}m^2$, т. е. $MN=\dfrac{\sqrt{6}}{6}m$,

значит $\boxed{\rho\,(K_1T_1;T_2K_2)=\dfrac{m\sqrt{6}}{6}}$.

Самостоятельная работа 3 (Использование скалярного произведения для нахождения углов)

1. Дано:

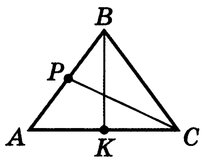
$\triangle ABC$
$AB = 2$
$AC = 4$
$\angle BAC = 120°$



Найдите $\cos\left(\widehat{m_{AB}; m_{AC}}\right)$.

2. Дано:

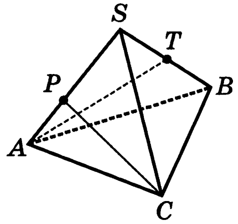
$\triangle ABC$
$m_{AB} = CP = 9$
$m_{AC} = BK = 6$
$\left(\widehat{m_{AB}; m_{AC}}\right) = 60°$



Найдите $\cos\left(\widehat{AB; AC}\right)$.

3. Дано:

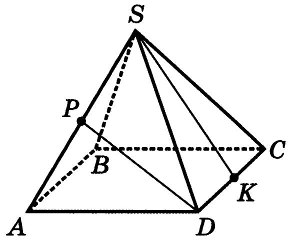
$SABC$ — пирамида,
все ребра равны
$2AP = PS$
$2ST = TB$



Найдите $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{CP}; \overrightarrow{AT}}\right)$.

4. Дано:

$SABC$ — пирамида,
все ребра равны
$AP = PS$
$DK = KC$



Найдите $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{SK}; \overrightarrow{DP}}\right)$.

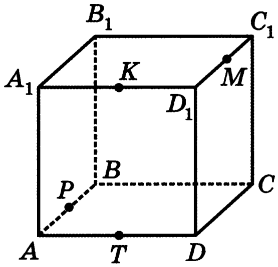
5. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
P, K, M, T — середины ребер куба

Найдите:

а) $\left(\widehat{\overrightarrow{AC_1};\overrightarrow{BD}}\right)$;

б) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PK};\overrightarrow{TM}}\right)$.



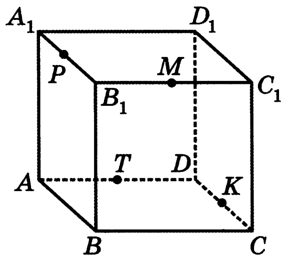
6. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
P, K, M, T — середины ребер куба

Найдите:

а) $\left(\widehat{\overrightarrow{KM};\overrightarrow{PT}}\right)$;

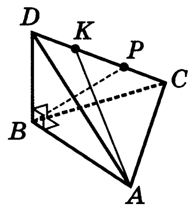
б) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1K};\overrightarrow{B_1T}}\right)$.



7. Дано:

$DABC$ — пирамида
$DB \perp ABC$
$AB \perp BC$
$AB = BC = DB$
$3PC = DP$
$3DK = KC$

Найдите $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AK};\overrightarrow{BP}}\right)$.

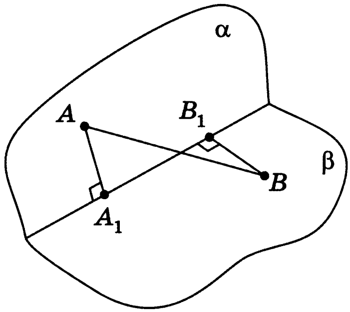


Задача-теорема (Косинус двугранного угла)

Концы отрезка AB принадлежат разным граням двугранного угла, равного φ. Расстояния от концов отрезка до ребра двугранного угла равны, соответственно, $AA_1 = a$; $BB_1 = b$, где $AA_1 \perp A_1B_1$; $BB_1 \perp A_1B_1$; $A_1B_1 = c$. Найдите длину AB.

Дано:

AA_1B_1 — α
BB_1A_1 — β
$\rho(\angle A\overline{A_1B_1}B) = \varphi$
$AA_1 \perp A_1B_1$
$BB_1 \perp A_1B_1$
$AA_1 = a$
$BB_1 = b$
$A_1B_1 = c$



Найдите AB.

а) Положим $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{A_1A} = \vec{a}\\ \overrightarrow{B_1B} = \vec{b}\\ \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{c}\end{array}\right|$, где $\begin{array}{ll}\left(\widehat{\overrightarrow{A_1A}; \vec{c}}\right) = 90^\circ; & |\vec{a}| = a\\ \left(\widehat{\overrightarrow{B_1B}; \vec{c}}\right) = 90^\circ; & |\vec{b}| = b.\\ \left(\widehat{\overrightarrow{A_1A}; \overrightarrow{B_1B}}\right) = \varphi; & |\vec{c}| = c\end{array}$

б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1B} = -\vec{a} + \vec{c} + \vec{b}$;

$$AB^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left(\overrightarrow{AB}\right)^2 = \vec{a}^2 + \vec{c}^2 + \vec{b}^2 - 2\underline{\vec{a}\cdot\vec{c}} + 2\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} - 2\vec{a}\cdot\vec{b} =$$

$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi = a^2 + c^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi$$

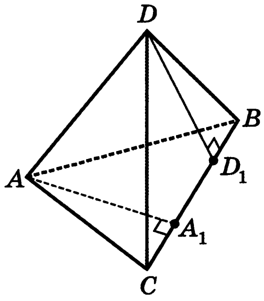
$$\left(\cos\left(\widehat{\vec{c}; \vec{b}}\right) = 0;\ \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = 0\right).$$

Полагая $AB = d$, получим $\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\varphi}$.

Для нахождения формулы вычисления двугранного угла выразим $\cos\varphi$, получим $\boxed{\cos\varphi = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2 - d^2}{2ab}}$.

Пример 1 Пусть $AA_1 = 5$; $BB_1 = 6$; $A_1B_1 = 8$; $AB = 10$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{5^2 + 6^2 + 8^2 - 10^2}{2\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{25}{60} = \boxed{\dfrac{5}{12}}$.

Пример 2



Дано:

$DABC$ — пирамида
$AD = CB = 15$
$AC = DB = 13$
$AB = DC = 14$

$\cos(\angle A\underline{BC}D)$

а) Положим $AA_1 \perp CB$; $DD_1 \perp CB$.

б) Рассмотрим $\triangle ABC$, где $p = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} = 21$.

По теореме Герона $S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-b)}$;

$S_{\triangle ABC} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$.

$$AA_1 = \frac{2S_{\triangle ABC}}{CB}; \quad AA_1 = \frac{2 \cdot 84}{15} = \frac{168}{15} = \frac{56}{5} = 11{,}2.$$

в) $\triangle ACB = \triangle DBC$, так как $\left.\begin{array}{r} AC = DB \\ AB = DC \\ CB = BC \end{array}\right|$,

значит $AA_1 = DD_1 = 11{,}2$.

г) $CA_1 = BD_1 = \sqrt{AC^2 - AA_1^2}$;

$CA_1 = \sqrt{13^2 - 11{,}2^2} = \sqrt{(13 + 11{,}2)\,(13 - 11{,}2)} =$
$= \sqrt{24{,}2 \cdot 1{,}8} = 0{,}1\sqrt{242 \cdot 18} = 0{,}1 \cdot 11 \cdot 6 = \boxed{6{,}6}$.

$A_1D_1 = CB - 2CA_1$; $\quad A_1D_1 = 15 - 2 \cdot 6{,}6 = 1{,}8$;

$$\cos(\angle A\underline{BC}D) = \frac{AA_1^2 + DD_1^2 + A_1D_1^2 - AD^2}{2AA_1 \cdot DD_1};$$

$$\cos(\angle A\underline{BC}D) = \frac{2 \cdot 11{,}2^2 + 1{,}8^2 - 15^2}{2 \cdot 11{,}2^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 11{,}2^2 - (15 + 1{,}8)(15 - 1{,}8)}{2 \cdot 11{,}2^2} = \frac{2 \cdot 11{,}2^2 - 16{,}8 \cdot 13{,}2}{2 \cdot 11{,}2} =$$

$$= -\frac{99}{16 \cdot 7} + 1 = \boxed{\frac{13}{112}}.$$

Координатно-векторный метод

Практикум 11 (Основные определения и теоремы)

1. Даны два вектора $\vec{a}\ \{-2; 1; -1\}$ и $\vec{b}\ \{1; -3; 2\}$. Найдите $|\vec{a} + 2\vec{b}|$.

> **<u>Напоминание.</u> Пусть $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$. Тогда $k\vec{a} = \{kx_1; ky_1; kz_1\}$; $\vec{a} + \vec{b} = \{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$; $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$.**

$2\vec{b} = \{2; -6; 4\}$;

$\vec{a} + 2\vec{b} = \{-2 + 2; 1 - 6; -1 + 4\} = \{0; -5; 3\}$;

$|\vec{a} + 2\vec{b}| = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \boxed{\sqrt{34}}$.

2. Даны точки $K\ (2; -1; 3)$ и $M\ (1; -2; 1)$. Разложите вектор $\overrightarrow{KM}$ по векторам $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

> **Пусть $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$. Тогда $\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.**

Отсюда

$\overrightarrow{KM} = \{1 - 2; -2 + 1; 1 - 3\} = \{-1; -1; -2\} = \boxed{-\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}}$.

3. $\triangle ABC$ задан координатами вершин: $A\ (3; -4; 2)$, $B\ (-3; 2; 4)$, $C\ (1; 3; -1)$. Найдите длину медианы CM.

> **$\vec{a} - \vec{b} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, где $\vec{a}\ (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b}\ (x_2; y_2; z_2)$.**

Так как M — середина отрезка AB, то его координаты равны $M\left(\dfrac{3-3}{2}; \dfrac{-4+2}{2}; \dfrac{2+4}{2}\right)$, т. е. $M\ (0; -1; 3)$.

Значит $\overrightarrow{CM}\ \{0 - 1; -1 - 3; 3 - (-1)\}$, т. е. $\overrightarrow{CM}\ \{-1; -4; 3\}$.

Тогда

$\left|\overrightarrow{CM}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 16 + 16} = \boxed{\sqrt{33}}$.

4. Дан вектор $\vec{p}\{-2;-2;1\}$. Найдите координаты единичного вектора $\vec{l}$, противоположного по направлению вектору $\vec{p}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются сонаправленными (пишут $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$), если их координаты, соответственно, равны $\vec{a}\ \{x_1; y_1; z_1\}$ и $\vec{b}\ \{kx_1; ky_1; kz_1\}$, причем число $k > 0$. Если $k < 0$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются противоположно направленными (пишут $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$), а число k называется коэффициентом пропорциональности.

Примечание

1. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = 1$.
2. $\vec{b} \parallel \vec{a}$, где $\vec{b}\ \{x_2; y_2; z_2\}$, тогда $\dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{y_2}{y_1} = \dfrac{z_2}{z_1} = k$ — коэффициент пропорциональности, т. е. $x_1 = \dfrac{x_2}{k}$, $y_1 = \dfrac{y_2}{k}$, $z_1 = \dfrac{z_2}{k}$.
3. $|\vec{a}| = \sqrt{\left(\dfrac{x_2}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{y_2}{k}\right)^2 + \left(\dfrac{z_2}{k}\right)^2} = \dfrac{|\vec{b}|}{|k|}$.
   Но $|\vec{a}| = 1$, значит $|k| = |\vec{b}|$.
4. Следовательно, для того чтобы найти координаты единичного вектора $\vec{a}$, зная координаты $\vec{b}$, необходимо *координаты* вектора $\vec{b}$ поделить на его длину ($|\vec{b}|$), если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если же $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, то делить нужно на $-|\vec{b}|$.

Вернемся к решению задачи.

$|\vec{p}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$;

$\dfrac{1}{3}\vec{p}\ \{-2; -2; 1\} = \vec{a}\ \left\{-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}\right\}$,

тогда $|\vec{a}| = \sqrt{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{3}\right)^2} = 1$.

$-\vec{a} = \vec{l}$, где $\vec{l} \uparrow\downarrow \vec{p}$ и $|\vec{l}| = 1$. Итак, $\boxed{\vec{l}\ \left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)}$.

5. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 120°$.

Найдите $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$.

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 120° =$$
$$= |\vec{a}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1^2 + 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = \boxed{0}.$$

6. Вычислите косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определите вид угла, образованного этими векторами, если $\vec{a} = -4\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\quad \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2};$$

$$\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}};$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{-4 + 1 + 6}{\sqrt{16 + 1 + 9} \cdot \sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{3}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{6}} =$$
$$= \frac{3\sqrt{39}}{2 \cdot 13 \cdot 3} = \frac{\sqrt{39}}{26}.$$

7. Даны векторы $\vec{a}\{-1; 3; -2\}$, $\vec{b}\{2; -1; 3\}$ и $\vec{p}\{-3; -1; -4\}$. Будут ли коллинеарны векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $\vec{p}$?

Определение 2 (Коллинеарность двух векторов). Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если с точностью до параллельного переноса их можно одновременно разместить на одной прямой.

Теорема. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда существует число $k \neq 0$, такое что $\vec{a} = k\vec{b}$, или когда пропорциональны их координаты.

а) $\vec{a} + 2\vec{b} = \vec{c}\{-1 + 2 \cdot 2; 3 + 2 \cdot (-1); -2 + 2 \cdot 3\} = \vec{c}\{3; 1; 4\}$.

б) $\vec{c} = k\vec{p}$; $\quad \vec{c} = \vec{p}\{-3k; -k; -4k\}$.

Если $\vec{c}\,\{3;1;4\} = \vec{p}\,\{-3k;-k;-4k\}$, то $\begin{cases} -3k = 3 \\ -k = 1 \\ -4k = 4 \end{cases}$.

$k=-1$, значит $(\vec{a}+2\vec{b})\uparrow\downarrow\vec{p}$, т. е. векторы коллинеарны.

8. В пространстве заданы четыре точки A, B, C и O, где $\overrightarrow{OA}=\{1;-1;2\}$, $\overrightarrow{OB}=\{3;-2;4\}$ и $\overrightarrow{OC}=\{5;-3;6\}$. Вопрос: лежат ли точки A, B и C на одной прямой?

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}\{1-3;-1-(-2);2-4\}=\overrightarrow{BA}\,\{-2;1;-2\}$;

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{CA}\,\{1-5;-1-(-3);2-6\}=\overrightarrow{CA}\,\{-4;2;-4\}$.

$\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\vec{m}\,\{-2;1;-2\}$, значит $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{BA}$,

т. е. точки A, B и C принадлежат одной прямой.

9. Компланарны ли векторы

$\vec{a}\,\{1;-3;2\}$, $\vec{b}\,\{4;2;-2\}$ и $\vec{c}\,\{-3;-5;3\}$?

<u>Определение 3 (Компланарность двух векторов).</u> Три ненулевых вектора называют компланарными, если с точностью до параллельного переноса их можно одновременно разместить в одной плоскости.

Теорема. Для того чтобы три ненулевых вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы существовала пара чисел x и y, таких что $xy \neq 0$ и $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$.

Вернемся к решению задачи.

Пусть $\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$, т. е. $x\vec{a}\,\{1;-3;2\}=\vec{a}_1\,\{x;-3x;2x\}$ и $y\vec{b}\,\{4;2;-2\}=\vec{b}_1\,\{4y;2y;-2y\}$,

тогда $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}_1\,\{x+4y;-3x+2y;2x-2y\}=\vec{c}\,\{-3;-5;3\}$.

Тогда

$$\begin{cases} x+4y=-3 \\ -3x+2y=-5 \quad \boxed{2}+\boxed{3} \\ 2x-2y=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x+4y=-3 \\ -x=-2 \\ 2x-2y=3 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4y=-5 \\ x=2 \\ 2y=1 \end{cases}; \quad \begin{cases} y=-1{,}25 \\ x=2 \\ y=0{,}5 \end{cases} \quad \emptyset.$$

Значит, таких чисел не существует, т. е. векторы не компланарны.

10. Разложите вектор $\vec{n}\,\{1;-1;2\}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}\,\{-2;1;-1\}$, $\vec{b}\,\{1;-3;2\}$ и $\vec{c}\,\{2;-3;0\}$.

Так как векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны, то существуют числа x, y и z, не равные нулю, такие что $\vec{n}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$.

Решим систему, следующую из условия:

$$\begin{cases} 1=-2x+y+2z \quad \boxed{1}+2\cdot\boxed{2} \\ -1=x-3y-3z \quad \boxed{2}+\boxed{3} \\ 2=-x+2y+0\cdot z \end{cases};$$

$$\begin{cases} -5y-4z=-1 \\ -y-3z=1 \quad \boxed{1}-5\cdot\boxed{2} \\ -x+2y=2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 11z=-6 \\ -y-3z=1 \\ -x+2y=2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z=-\dfrac{6}{11} \\ y=\dfrac{7}{11} \\ x=-\dfrac{8}{11} \end{cases}.$$

Таким образом, $\boxed{\vec{n}=-\dfrac{8}{11}\vec{a}+\dfrac{7}{11}\vec{b}-\dfrac{6}{11}\vec{c}}$.

Тренировочная работа 8 (Примеры использования координатно-векторного метода)

1. В $\triangle ABC$ вершины имеют координаты $A\ (0;2;-1)$, $B\ (2;0;1)$ и $C\ (4;2;-2)$. Найдите:

а) длину медианы $m_{AC} = BM$;

б) $\angle C$;

в) координаты точки D, если $ABCD$ — параллелограмм.

2. При каком значении m векторы $\vec{a}\ \{m+2;1;m+1\}$ и $\vec{b}\ \{3;m;2\}$:

а) коллинеарны;

б) перпендикулярны?

3. $|\vec{a}| = 4$; $|\vec{b}| = 2$; $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 60^\circ$; $\vec{p} = \vec{a} - \vec{b}$; $\vec{q} = \vec{a} + 2\vec{b}$; $\vec{c} = m\vec{a} + \vec{b}$. Найдите:

а) $\vec{p}\cdot\vec{q}$;

б) $\cos\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)$;

в) при каком m $\vec{c}\perp\vec{p}$?

4. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты: $A\,(-1;-4)$, $B\,(1;-8)$, $C\,(7;-5)$, и $D\,(17;5)$. Определите вид четырехугольника.

5*. В $\triangle ABC$ вершины имеют координаты: $A\ (2;1;4)$, $B\ (3;-2;1)$ и $C\ (-1;4;-2)$. Точка $M \in AB$, причем $AM : MB = 2 : 3$. Точка $N \in AC$, причем $CM\perp BN$. Определите координаты точки N.

Решение тренировочной работы 8

1. В $\triangle ABC$ вершины имеют координаты $A\ (0;2;-1)$, $B\ (2;0;1)$ и $C\ (4;2;-2)$.

а) Найдем длину медианы $m_{AC} = BM$.

$$M\left(\frac{0+4}{2};\frac{2+2}{2};\frac{-1-2}{2}\right) = M\ (2;2;-1{,}5).$$

Известно, что для точек $A\ (x_1;y_1;z_1)$ и $B\ (x_2;y_2;z_2)$:

$$AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Тогда $BM = \sqrt{(2-2)^2+(2-0)^2+(-1{,}5-1)^2} =$

$$= \sqrt{4+6{,}25} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{41}}.$$

б) Найдем $\angle C$.

$\angle C$ равен $\left(\widehat{AC;BC}\right)$,

но $\left(\widehat{AC;BC}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)$, если $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) \leqslant 90^\circ$ и

$\left(\widehat{AC;BC}\right) = 180^\circ - \left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right)$, если $\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) > 90^\circ$.

Пусть $\left.\begin{matrix}\boldsymbol{A\ (x_1;y_1;z_1)}\\ \boldsymbol{B\ (x_2;y_2;z_2)}\end{matrix}\right|$,
тогда $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\ \boldsymbol{\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}}\quad (\boldsymbol{A \not\equiv B})$.
Пусть $\boldsymbol{\vec{a}\ \{x_1;y_1;z_1\}},\quad \boldsymbol{\vec{b}\ \{x_2;y_2;z_2\}}$,
тогда $\boldsymbol{|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2},\ |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

$$\mathbf{cos}\left(\widehat{\vec{a}\cdot\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

$\overrightarrow{AC}\ \{4-0;2-2;-2-(-1)\} = \overrightarrow{AC}\ \{4;0;-1\}$.

$\overrightarrow{BC}\ \{4-2;2-0;-2-1\} = \overrightarrow{BC}\ \{2;2;-3\}$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|};$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) = \frac{4\cdot 2+0\cdot 2+(-1)\cdot(-3)}{\sqrt{4^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{2^2+2^2+3^2}} = \frac{11}{17},$$

значит $\angle C$ — острый, тогда

$$\cos\left(\widehat{AC;BC}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BC}}\right) = \boxed{\arccos\frac{11}{17} = \angle C}.$$

в) Найдем координаты точки D, если $ABCD$ — параллелограмм.

Так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$, тогда $\overrightarrow{BC}\,\{2;2;-3\} = \overrightarrow{AD}\,\{x-0;y-2;z+1\}$,

т. е. $\begin{cases} 2 = x \\ 2 = y-2 \\ -3 = z+1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \\ z = -4 \end{cases}$, значит $D\,(2;4;-4)$.

2. При каком значении m векторы $\vec{a}\,\{m+2;1;m+1\}$ и $\vec{b}\,\{3;m;2\}$:

а) коллинеарны?

Для параллельных $\vec{a}\,\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2;y_2;z_2\}$ $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$.

Это означает, что их координаты пропорциональны.

Тогда $\dfrac{m+2}{3} = \dfrac{1}{m} = \dfrac{m+1}{2}$; $\begin{cases} \dfrac{m+2}{3} = \dfrac{1}{m} \\ \dfrac{1}{m} = \dfrac{m+1}{2} \end{cases}$;

$\begin{cases} m^2+2m-3=0 \\ m^2+m-2=0 \end{cases}$; $\boxed{m=1}$.

Значит данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны только когда они равны.

б) перпендикулярны?

Это возможно только если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Найдем это скалярное произведение:

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(m+2)\cdot 3+1\cdot m+(m+1)\cdot 2=0;$

$3m+6+m+2m+2=0;\quad 6m=-8;\quad \boxed{m=-\frac{4}{3}}.$

3. $|\vec{a}|=4;\quad |\vec{b}|=2;\quad \left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=60^\circ;$

$\vec{p}=\vec{a}-\vec{b};\quad \vec{q}=\vec{a}+2\vec{b};\ \vec{c}=m\vec{a}+\vec{b}.$

а) Найдем $\vec{p}\cdot\vec{q}$.

$$\vec{p}\cdot\vec{q}=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}+2\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=$$
$$=|\vec{a}|^2+|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ-2|\vec{b}|^2=16+8\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 4=\boxed{12}.$$

б) Найдем $\cos\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)$.

1. $$|\vec{p}|=\sqrt{(\vec{a}-\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=$$
$$=\sqrt{|\vec{a}|^2-2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ+|\vec{b}|^2}=$$
$$=\sqrt{16-2\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

2. $$|\vec{q}|=\sqrt{(\vec{a}+2\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2}=$$
$$=\sqrt{|\vec{a}|^2+4|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ+4|\vec{b}|^2}=$$
$$=\sqrt{16+4\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot 4}=\sqrt{48}=4\sqrt{3}.$$

3. $$\cos\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)=\frac{12}{2\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3}}=\frac{1}{2},$$

т. е. $\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)=\frac{1}{2}}$, значит $\left(\widehat{\vec{p};\vec{q}}\right)=60^\circ.$

в) При каком m $\vec{c}\perp\vec{p}$?

Так как $\vec{c}\perp\vec{p}$, то $\vec{c}\cdot\vec{p}=0$, значит $(m\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})=0$
$(\vec{c}=m\vec{a}+\vec{b},\quad \vec{p}=\vec{a}-\vec{b})$;

$m\vec{a}^2+\vec{b}\cdot\vec{a}-m\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}^2=0.$

По условию $|\vec{a}|=4$ и $|\vec{b}|=2$. Тогда

$m|\vec{a}|^2+|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 60^\circ-m|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ-|\vec{b}|^2=0;$

$16m+4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-m\cdot 4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}-4=0;\quad 12m=0.$

Таким образом, $\vec{c}\perp\vec{p}$ только при $\boxed{m=0}$.

4. Вершины четырехугольника $ABCD$ имеют координаты: $A(-1;-4)$, $B(1;-8)$, $C(7;-5)$, и $D(17;5)$. Определите вид четырехугольника.

1. Найдем вначале координаты векторов:

   $\overrightarrow{AB}\{2;-4\}$, $\overrightarrow{BC}\{6;3\}$, $\overrightarrow{CD}\{10;10\}$, $\overrightarrow{AD}\{18;9\}$.

   Сразу видно, что $\overrightarrow{BC}\parallel\overrightarrow{AD}$ (их координаты пропорциональны), а $\overrightarrow{AD}\nparallel\overrightarrow{CD}$, т.е. похоже, что $ABCD$ — трапеция.

2. Более того, навскидку видно, что $\left|\overrightarrow{AB}\right|\neq\left|\overrightarrow{CD}\right|$ (при желании это можно вычислить), т.е. это не равнобедренная трапеция.

3. Вычислим $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

   Для $\vec{a}\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\{x_2;y_2;z_2\}$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

   Тогда $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=2\cdot 6+(-4)\cdot 3=0$,

   следовательно, $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{BC}$, т.е. $ABCD$ — прямоугольная трапеция.

5*. В $\triangle ABC$ вершины имеют координаты: $A\ (2;1;4)$, $B\ (3;-2;1)$ и $C\ (-1;4;-2)$. Точка $M \in AB$, причем $AM : MB = 2 : 3$. Точка $N \in AC$, причем $CM \perp BN$. Определим координаты точки N.

1. Пусть $M\ (x_1; y_1; z_1)$, тогда, так как $3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$, то, зная координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{MB}$
$\overrightarrow{AM}\,\{x_1-2; y_1-1; z_1-4\}$, $\overrightarrow{MB}\,\{3-x_1; -2-y_1; 1-z_1\}$,
получим, что $\begin{cases} 3(x_1-2) = 2(3-x_1) \\ 3(y_1-1) = 2(-2-y_1) \\ 3(z_1-4) = 2(1-z_1) \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{5} \\ y_1 = -\dfrac{1}{5} \\ z_1 = \dfrac{14}{5} \end{cases}$,
т. е. $M\left(\dfrac{12}{5}; -\dfrac{1}{5}; \dfrac{14}{5}\right)$.

2. Пусть $N\ (x_2; y_2; z_2)$.
$\overrightarrow{CM}\left\{\dfrac{12}{5}-(-1); -\dfrac{1}{5}-4; \dfrac{14}{5}-(-2)\right\} = \overrightarrow{CM}\left\{\dfrac{17}{5}; -\dfrac{21}{5}; \dfrac{24}{5}\right\}$;
$\overrightarrow{BN}\,\{x_2-3; y_2-(-2); z_2-1\}$.

3. Так как $CM \perp BN$, то $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$,
значит $\dfrac{17}{5}(x_2-3) + \left(-\dfrac{21}{5}\right)(y_2+2) + \dfrac{24}{5}(z_2-1) = 0$;
$17(x_2-3) - 21(y_2+2) + 24(z_2-1) = 0$.

4. Точка $N \in AC$, значит $\overrightarrow{AN}\,\{x_2-2; y_2-1; z_2-4\} =$
$= k\overrightarrow{NC}\,\{-1-x_2; 4-y_2; -2-z_2\}$, тогда
$$\begin{cases} \dfrac{x_2-2}{-1-x_2} = k \\ \dfrac{y_2-1}{4-y_2} = k \\ \dfrac{z_2-4}{-2-z_2} = k \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2-2 = -k-kx_2 \\ y_2-1 = 4k-ky_2 \\ z_2-4 = -2k-kz_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2-k}{k+1} \\ y_2 = \dfrac{1+4k}{k+1} \\ z_2 = \dfrac{4-2k}{k+1} \end{cases}.$$

5. Подставляя значения x_2, y_2 и z_2 в уравнение $17(x_2-3)-21(y_2+2)+24(z_2-1)=0$, получим значение k:

$$17\left(\frac{2-k}{k+1}-3\right)-21\left(\frac{1+4k}{k+1}+2\right)+24\left(\frac{-2k+4}{k+1}-1\right)=0;$$

$$17(2-k-3k-3)-21(1+4k+2k+2)+24(-2k+4-k-1)=0;$$

$$17(-4k-1)-21(6k+3)+24(-3k+3)=0;$$

$$-68k-17-126k-63-72k+72=0;$$

$$-266k-8=0; \quad k=-\frac{8}{266}; \quad k=-\frac{4}{133}.$$

6. Подставляя значение k в систему $\begin{cases} x_2=\dfrac{2-k}{k+1} \\ y_2=\dfrac{1+4k}{k+1} \\ z_2=\dfrac{4-2k}{k+1} \end{cases}$,

получим $\boxed{N\left(\frac{90}{43};\frac{39}{43};\frac{180}{43}\right)}$.

Тренировочная работа 9 (Использование различных методов для нахождения углов и расстояний)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ отношение длин ребер, исходящих из одной вершины, равно $3:2:2$, где AA_1 — наибольшее ребро.
Пусть точки N, K, T, и P — середины, соответственно, ребер B_1C_1, D_1E_1, CD и FE.

Решая первое задание двумя способами, найдите:

Вариант 1

а) $\cos\left(\widehat{FA_1; AB_1}\right)$
б) $\rho\,(D; FA_1)$

Вариант 2

а) $\left(\widehat{PD_1; DN}\right)$
б) $\rho\,(P; DF_1)$

Вариант 3

а) $\left(\widehat{NT; PK}\right)$
б) $\rho\,(BB_1; PK)$

Вариант 4

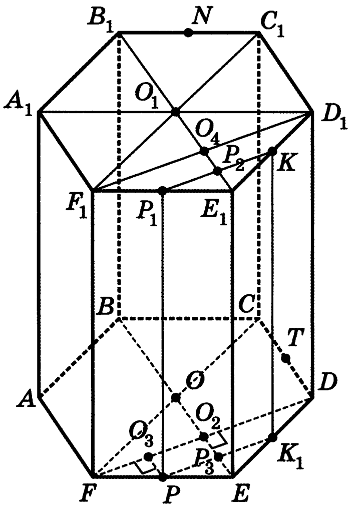
а) $\left(\widehat{TF_1; BK}\right)$
б*) $\rho\,(FE_1; EB_1)$

Тренировочная работа 9. Моделирование условий

Обозначим $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AA_1}=\vec{a}\\ \overrightarrow{AB}=\vec{b}\\ \overrightarrow{AF}=\vec{c}\end{array}\right|,$

при этом $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=90^\circ,$

$\left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right)=90^\circ,\ \left(\widehat{\vec{b};\vec{c}}\right)=120^\circ.$



По условию $|\vec{a}|:|\vec{b}|:|\vec{c}|=3:2:2$ (будем считать, что $|\vec{a}|=3m$).

Также по условию:

а) $PP_1 \parallel AA_1 \quad (P_1 \in F_1E_1)$;

б) $KK_1 \parallel AA_1 \quad (K_1 \in ED)$;

в) $AD \cap BE = O \quad (BE \perp FD)$;
$A_1D_1 \cap B_1E_1 = O_1 \quad (B_1E_1 \perp F_1D_1)$;

г) $BE \cap FD = O \quad (OO_2 = EO_2)$;
$B_1E_1 \cap F_1D_1 = O_4 \quad (O_1O_4 = E_1O_4)$;

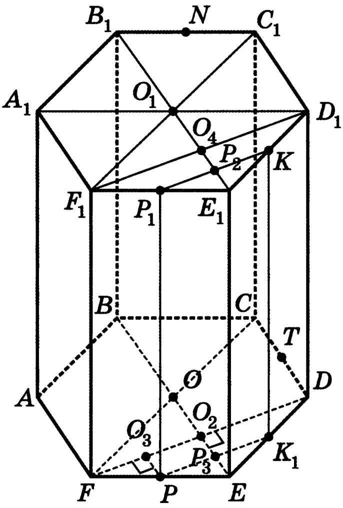
д) $B_1E_1 \cap P_1K = P_2 \quad (O_4P_2 = E_1P_2)$;
$BE \cap PK_1 = P_3 \quad (O_2P_3 = EP_3)$;

е) $PO_3 \parallel BE \quad (O_3 \in FD;\ FO_3 = O_2O_3)$.

Эти результаты можно получить, подробно исследуя метрические отношения в правильном шестиугольнике.

Решение тренировочной работы 9

Вариант 1



а) Найдем $\cos\left(\widehat{FA_1; AB_1}\right)$.

Первый способ

Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$; $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$; $\overrightarrow{AF} = \vec{c}$.

При этом $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}\right) = 120°$.

По условию $|\vec{a}| : |\vec{b}| : |\vec{c}| = 3 : 2 : 2$ (будем считать, что $|\vec{a}| = 3m$).

1. $\overrightarrow{FA_1} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AA_1} = \vec{a} - \vec{c}$;
   $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB_1} = \vec{b} + \vec{a}$.

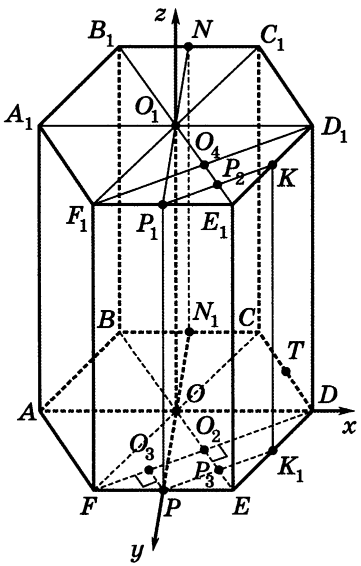
2. $\overrightarrow{FA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = (\vec{a} - \vec{c})(\vec{b} + \vec{a}) = \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{a}^2 - \vec{b} \cdot \vec{c} - \underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} =$
   $= (3m)^2 - 2m \cdot 2m \cdot \cos 120° = 9m^2 - 4m^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 11m^2.$

3. $\left|\overrightarrow{FA_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{FA_1}^2} = \sqrt{(\vec{a} - \vec{c})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} + \vec{c}^2} =$
   $= \sqrt{9m^2 + 4m^2} = \sqrt{13}m$;
   $\left|\overrightarrow{AB_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB_1}^2} = \sqrt{(\vec{b} + \vec{a})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + 2\underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \vec{a}^2} =$
   $= \sqrt{4m^2 + 9m^2} = \sqrt{13}m$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FA_1}; \overrightarrow{AB_1}}\right) = \frac{\overrightarrow{FA_1} \cdot \overrightarrow{AB_1}}{\left|\overrightarrow{FA_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB_1}\right|} =$$

$$= \frac{11m^2}{\sqrt{13}m \cdot \sqrt{13}m} = \frac{11}{13} > 0, \text{ т. е. } \boxed{\cos\left(\widehat{FA_1; AB_1}\right) = \frac{11}{13}}.$$

Второй способ (координатный)



Введем систему координат.

OO_1 — ось аппликат (Oz);

OP — ось ординат (Oy);

OD — ось абсцисс (Ox).

Отметим, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$:

$AB = AO = AF$, $OP = \sqrt{3}m$,

$FB \perp AO$, $FP = m$.

Установим координаты вершин:

$F\ \left(-m; m\sqrt{3}; 0\right)$;

$A_1\ (-2m; 0; 3m)$;

$A\ (-2m; 0; 0)$;

$B_1\ \left(-m; -m\sqrt{3}; 3m\right)$.

Тогда $\overrightarrow{FA_1}\ \left\{-m; -m\sqrt{3}; 3m\right\}$; $\overrightarrow{AB_1}\ \left\{m; -m\sqrt{3}; 3m\right\}$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{FA_1}; \overrightarrow{AB_1}}\right) = \frac{-m^2+3m^2+9m^2}{\sqrt{m^2+3m^2+9m^2}\cdot\sqrt{m^2+3m^2+9m^2}} = \frac{11}{13} > 0.$$

$$\boxed{\cos\left(\widehat{FA_1; AB_1}\right) = \frac{11}{13}}.$$

б) Найдем $\rho(D; FA_1)$.

1. Из свойств правильного шестиугольника $AF \perp FD$.

   Так как $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$

   $\left(\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF};\ \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FE};\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{ED}\right)$,

   то $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} = 2\vec{b} + \vec{c}$.

   $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{FD} = \vec{c}\cdot(2\vec{b}+\vec{c}) = 2\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2 =$

   $= 2\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) + (2m)^2 = -4m^2 + 4m^2 = 0.$

2. $\left.\begin{array}{l} FD\perp AF \\ FD\perp FF_1 \end{array}\right|$, значит $FD\perp AA_1F_1F$, тогда $FD\perp FA_1$,

следовательно $\rho(D; FA_1) = FD$,

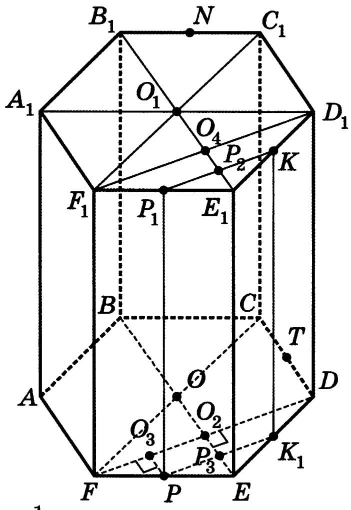
где $FD = \left|\overrightarrow{FD}\right| = \sqrt{(2\vec{b}+\vec{c})^2} = \sqrt{4\vec{b}^2 + 4\vec{b}\cdot\vec{c} + \vec{c}^2} =$

$= \sqrt{4\cdot 4m^2 + 4\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 4m^2} = 2\sqrt{3}m.$

Итак, $\boxed{\rho(D; FA_1) = 2\sqrt{3}m}$.

Вариант 2

Пусть точки N, K, T и P — середины, соответственно, ребер B_1C_1, D_1E_1, CD и FE.



а) Найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{PD_1};\overrightarrow{DN}}\right)$.

Первый способ

1. $\overrightarrow{PD_1} = \overrightarrow{PE} + \underline{\overrightarrow{ED}} + \underline{\underline{\underline{\overrightarrow{DD_1}}}} =$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \underline{\overrightarrow{AB}} + \underline{\underline{\underline{\overrightarrow{AA_1}}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} + \vec{b} + \vec{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF}\right) + \vec{b} + \vec{a} =$$

$$= \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b} + \vec{a} = \vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{C_1N} = -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C_1B_1} =$$

$$= -\vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AO} = -\vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{3}{2}\vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

2. $\overrightarrow{PD_1} \cdot \overrightarrow{DN} = \left(\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right)\left(-\frac{3}{2}\vec{c} + \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) =$

$$= -\frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{9}{4}\vec{b}\cdot\vec{c} - \frac{3}{4}\vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \frac{3}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} - \frac{3}{4}\vec{b}^2 - \frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{b} =$$

$$= -\frac{9}{4}\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}(2m)^2 + (3m)^2 - \frac{3}{4}(2m)^2 -$$

$$- \frac{1}{4}\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}m^2 - 3m^2 + 9m^2 - 3m^2 + \frac{1}{2}m^2 = 8m^2.$$

3. $\left|\overrightarrow{PD_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PD_1}^2} = \sqrt{\left(\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$

$= \sqrt{|\vec{a}|^2+\frac{9}{4}\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{3}{2}\vec{b}\cdot\vec{c}} =$

$= \sqrt{9m^2+\frac{9}{4}\cdot 4m^2+\frac{1}{4}\cdot 4m^2+\frac{3}{2}\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4m.$

$\left|\overrightarrow{DN}\right| = \sqrt{\overrightarrow{DN}^2} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\vec{c}+\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$

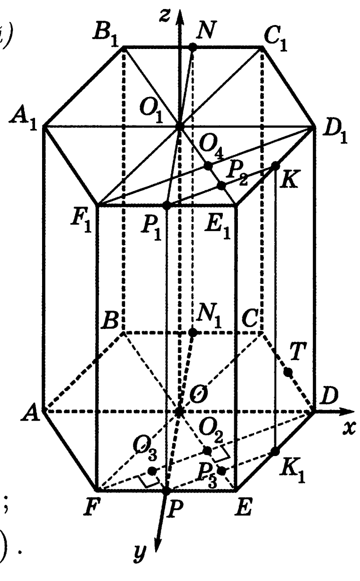
$= \sqrt{\frac{9}{4}\vec{c}^2+\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}^2-3\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{3}{2}\vec{c}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{b}} =$

$= \sqrt{\frac{9}{4}\cdot 4m^2+9m^2+\frac{1}{4}\cdot 4m^2+\frac{3}{2}\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 4m.$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PD_1};\overrightarrow{DN}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{PD_1}\cdot\overrightarrow{DN}}{\left|\overrightarrow{PD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DN}\right|} = \dfrac{8m^2}{4m\cdot 4m} = \dfrac{1}{2} > 0.$

Следовательно, $\boxed{\left(\widehat{PD_1;DN}\right) = 60^\circ}$.

Второй способ (координатный)



Введем систему координат:

OO_1 — ось аппликат (Oz);

OP — ось ординат (Oy);

OD — ось абсцисс (Ox).

Отметим, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$:

$AB = AO = AF$;

$OP = \sqrt{3}m$; $EP = m$.

Установим координаты точек:

$P\ \left(0; m\sqrt{3}; 0\right)$; $D_1\ (2m; 0; 3m)$;

$D\ (2m; 0; 0)$; $N\ \left(0; -m\sqrt{3}; 3m\right)$.

Значит $\overrightarrow{PD_1}\ \{2m; -m\sqrt{3}; 3m\}$; $\overrightarrow{DN}\ \{-2m; -m\sqrt{3}; 3m\}$.

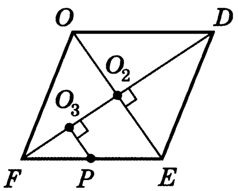
$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{PD_1}; \overrightarrow{DN}}\right) =$$

$$= \frac{-4m^2 + 3m^2 + 9m^2}{\sqrt{4m^2 + 3m^2 + 9m^2} \cdot \sqrt{4m^2 + 3m^2 + 9m^2}} = \frac{1}{2} > 0,$$

тогда $\left(\widehat{\overrightarrow{PD_1}; \overrightarrow{DN}}\right) = 60^\circ$, т. е. $\boxed{\left(\widehat{PD_1; DN}\right) = 60^\circ.}$

б) Найдем $\rho(P; DF_1)$.

1. Так как $FODE$ — ромб, то $DF \perp OE$.



2. $\rho(P; FD) = \frac{1}{2} O_2E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot OE = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot m = \frac{1}{2} m.$

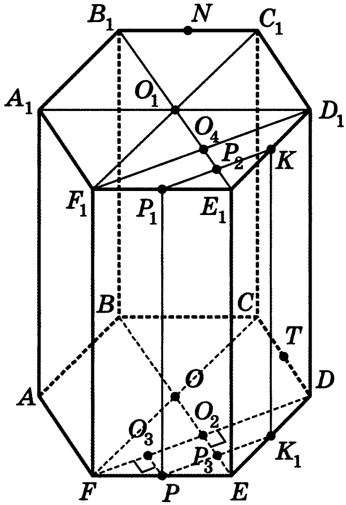
3. Так как $\left.\begin{matrix} O_3P \perp FF_1 \\ O_3P \perp FD \end{matrix}\right|$, то $PO_3 \perp FF_1D_1D$, следовательно $PO_3 \perp DF_1$.

Таким образом, $\rho(P; DF_1) = \rho(P; FF_1D_1D) = \frac{1}{2}$,

т. е. $\boxed{\rho(P; DF_1) = \frac{1}{2} m}$.

Вариант 3

Пусть точки N, K, T и P — середины ребер B_1C_1, D_1E_1, CD и FE соответственно.



а) Найдем $\cos\left(\widehat{NT; PK}\right)$.

Первый способ

1. $\overrightarrow{NT} = \overrightarrow{NC_1} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CT} =$
$= \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \dfrac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} =$
$= \vec{c} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b};$
$\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{E_1K} =$
$= \dfrac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b} =$
$= \vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}.$

2. $\overrightarrow{NT} \cdot \overrightarrow{PK} = \left(\vec{c} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)\left(\vec{a} + \vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c}\right) =$

$$= \vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}^2 + \frac{1}{2}\vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{c}^2 - \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c} + \frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{c} =$$

$$= -(3m)^2 + 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}(2m)^2 + \frac{1}{2}(2m)^2 +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) =$$

$$= -9m^2 - 2m^2 + 2m^2 + 2m^2 - \frac{1}{2}m^2 = -\frac{15}{2}m^2.$$

3. $\left|\overrightarrow{NT}\right| = \sqrt{\overrightarrow{NT}^2} = \sqrt{\left(\vec{c} - \vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 - 2\vec{c}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{4m^2 + 9m^2 + \frac{1}{4}\cdot 4m^2 + 2m\cdot 2m\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}m.$$

$$\left|\overrightarrow{PK}\right| = \sqrt{\overrightarrow{PK}^2} = \sqrt{\left(\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\vec{a}^2+\vec{b}^2+\frac{1}{4}\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}} =$$

$$= \sqrt{9m^2+4m^2+m^2+4m^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2\sqrt{3}m.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{NT};\overrightarrow{PK}}\right) = \frac{-\frac{15}{2}m^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2 m^2} = -\frac{5}{8} < 0.$$

Так как $\boxed{\arccos(-m) = \pi - \arccos m}$,

то $\left(\widehat{\overrightarrow{NT};\overrightarrow{PK}}\right) = \pi - \arccos\frac{5}{8}$,

тогда $\boxed{\left(\widehat{NT;PK}\right) = \arccos\frac{5}{8}}$.

Второй способ (координатный)

Введем систему координат:

OO_1 — ось аппликат (Oz);

OP — ось ординат (Oy);

OD — ось абсцисс (Ox).

Отметим, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$:

$AB = AO = AF = 2m; \quad OP = O_1N = \sqrt{3}m.$

Установим координаты вершин:

$N\left(0; -m\sqrt{3}; 3m\right)$; $\quad T\left(\frac{3}{2}m; -\frac{m\sqrt{3}}{2}; 0\right)$; $\quad P\left(0; m\sqrt{3}; 0\right)$;

$K\left(\frac{3}{2}m; \frac{m\sqrt{3}}{2}; 3m\right)$.

Значит $\overrightarrow{NT}\left\{\frac{3}{2}m; \frac{m\sqrt{3}}{2}; -3m\right\}$; $\overrightarrow{PK}\left\{\frac{3}{2}m; -\frac{m\sqrt{3}}{2}; 3m\right\}$.

Следовательно, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{NT};\overrightarrow{PK}}\right) =$

$$= \frac{\frac{9}{4}m^2 - \frac{3}{4}m^2 - 9m^2}{\sqrt{\frac{9}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^2 + 9m^2}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}m^2 + \frac{3}{4}m^2 + 9m^2}} = -\frac{5}{8} < 0.$$

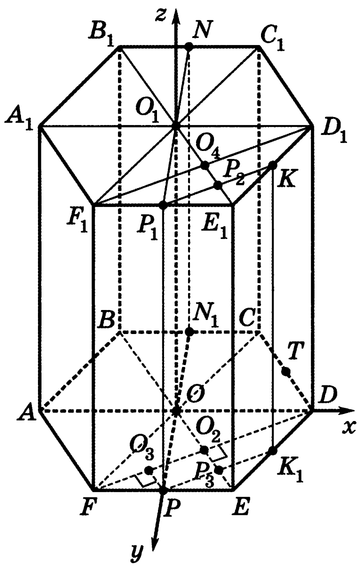
Итак, $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{NT};\overrightarrow{PK}}\right) = -\frac{5}{8}$, т. е. $\boxed{\left(\widehat{NT;PK}\right) = \arccos\frac{5}{8}}$.

б) Найдем $\rho(BB_1; PK)$.

1. Так как $PK \in PP_1KK_1 \parallel BB_1$, то $\rho(BB_1; PK) = \rho(BB_1; PP_1KK_1)$.

2. $\left.\begin{array}{l} BB_1 \perp B_1E_1 \\ BB_1 \parallel PP_1KK_1 \\ B_1E_1 \perp P_1K \end{array}\right|$,
значит $B_1P_2 = \rho(BB_1; PK) \quad (P_2 = P_1K \cap B_1E_1)$.

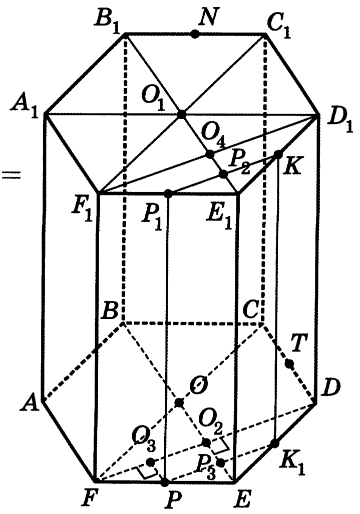
3. $B_1P_2 = B_1O_1 + O_1O_4 + O_4P_2 = 2m + m + \frac{1}{2}m = 3{,}5m$,
следовательно $\boxed{\rho(BB_1; PK) = 3{,}5m}$.



Вариант 4

Пусть точки N, K, T и P — середины ребер B_1C_1, D_1E_1, CD и FE соответственно.

а) Найдем $\cos\left(\widehat{TF_1; BK}\right)$.



Первый способ

1. $\overrightarrow{TF_1} = \overrightarrow{TD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF_1} =$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AA_1} =$

$= \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{b} - (\vec{b} + \vec{c}) + \vec{a} =$

$= -\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a};$

$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{E_1K} =$

$= 2\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AA_1} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} =$

$= 2\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$

2. $\overrightarrow{TF_1} \cdot \overrightarrow{BK} = \left(-\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}\right)\left(2\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) =$

$= -\vec{c}^2 - 4\vec{b}\cdot\vec{c} + 2\vec{a}\cdot\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c}\cdot\vec{a} - 2\vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{a}^2 - \frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{b} - \vec{b}^2 + \frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{b} =$

$= -4m^2 - 4\cdot 4m^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9m^2 - \frac{1}{4}\cdot 4m^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 4m^2 =$

$= 9\frac{1}{2}\cdot m^2.$

3. $\left|\overrightarrow{TF_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{TF_1}^2} = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\vec{c} - 2\vec{b} + \vec{a}\right)^2} =$

$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2 + 4\vec{b}^2 + \vec{a}^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c} - \vec{c}\cdot\vec{a} - 4\vec{b}\cdot\vec{a}} =$

$= \sqrt{m^2 + 16m^2 + 9m^2 - 4m^2} = m\sqrt{22}.$

$$\left|\overrightarrow{BK}\right| = \sqrt{\overrightarrow{BK}^2} = \sqrt{\left(2\vec{c} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$$

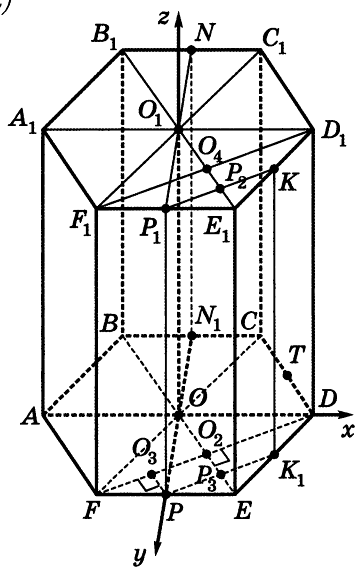
$$= \sqrt{4\vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 + 4\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{c}\cdot\vec{b}} =$$

$$= \sqrt{16m^2 + 9m^2 + m^2 - 4m^2} = m\sqrt{22}.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{TF_1}; \overrightarrow{BK}}\right) = \frac{\frac{19}{2}m^2}{\left(m\sqrt{22}\right)^2} = \frac{19}{44} > 0;$$

$$\boxed{\left(\widehat{TF_1; BK}\right) = \arccos\frac{19}{44}}.$$

Второй способ (координатный)



Введем систему координат:

OO_1 — ось аппликат (Oz);

OP — ось ординат (Oy);

OD — ось абсцисс (Ox).

Отметим, что в правильном шестиугольнике $ABCDEF$:

$AB = AO = AF$; $OP = \sqrt{3}m$;

$E_1K = m$; $FB \perp AO$.

Установим координаты вершин:

$F_1\ \left(-m; m\sqrt{3}; 3m\right)$;

$T\ \left(\frac{3}{2}m; -\frac{m\sqrt{3}}{2}; 0\right)$;

$B\ \left(-m; -m\sqrt{3}; 0\right)$; $\quad K\ \left(\frac{3}{2}m; \frac{m\sqrt{3}}{2}; 3m\right)$.

Тогда $\overrightarrow{TF_1}\left\{-\frac{5}{2}m; \frac{3m\sqrt{3}}{2}; 3m\right\}$; $\quad \overrightarrow{BK}\left\{\frac{5}{2}m; \frac{3m\sqrt{3}}{2}; 3m\right\}$.

Значит $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{TF_1};\overrightarrow{BK}}\right) =$

$$= \frac{-\frac{25}{4}m^2 + \frac{27}{4}m^2 + 9m^2}{\sqrt{\frac{25}{4}m^2 + \frac{27}{4}m^2 + 9m^2} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}m^2 + \frac{27}{4}m^2 + 9m^2}} =$$

$$= \frac{\frac{38}{4}}{22} = \frac{19}{44} > 0.$$

$$\boxed{\left(\widehat{TF_1;BK}\right) = \arccos\frac{19}{44}}.$$

б*) Найдем $\rho\,(FE_1; EB_1)$.

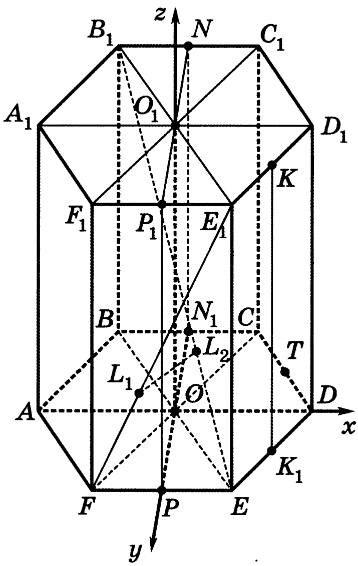
Для этого используем координатный метод.

OO_1 — ось аппликат (Oz);

OP — ось ординат (Oy);

OD — ось абсцисс (Ox).

Установим координаты вершин.



$F\ \left(-m; m\sqrt{3}; 0\right)$;

$E_1\ \left(m; m\sqrt{3}; 3m\right)$;

$E\ \left(m; m\sqrt{3}; 0\right)$;

$B_1\ \left(-m; -m\sqrt{3}; 3m\right)$.

Тогда $\overrightarrow{FE_1}\ \{2m; 0; 3m\}$;

$\overrightarrow{EB_1}\ \left\{-2m; -2m\sqrt{3}; 3m\right\}$;

$\overrightarrow{FE}\ \{2m; 0; 0\}$.

$\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{L_1E_1} + \overrightarrow{E_1E} + \overrightarrow{EL_2}$,

где $L_1 \in FE_1$; $L_2 \in EB_1$, $L_1L_2 \perp FE_1$ и $L_1L_2 \perp EB_1$.

$\overrightarrow{L_1F} = x\overrightarrow{FE_1}$, тогда $\overrightarrow{L_1F}\ \{2mx; 0; 3mx\}$;

$\overrightarrow{EL_2} = y\overrightarrow{EB_1}$, тогда $\overrightarrow{EL_2}\ \left\{-2my; -2m\sqrt{3}y; 3my\right\}$.

Значит $\overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{L_1F}\ \{2mx; 0; 3mx\} + \overrightarrow{FE}\ \{2m; 0; 0\} +$

$+ \overrightarrow{EL_2}\ \left\{-2my; -2m\sqrt{3}y; 3my\right\}$,

т. е. $\overrightarrow{L_1L_2}\ \left\{2m(x+1-y); -2m\sqrt{3}y; 3m(x+y)\right\}$.

Но $\overrightarrow{L_1L_2} \perp \overrightarrow{FE_1}$; $\quad \overrightarrow{L_1L_2} \perp \overrightarrow{EB_1}$,

значит $\overrightarrow{L_1L_2} \cdot \overrightarrow{FE_1} = 0$; $\quad \overrightarrow{L_1L_2} \cdot \overrightarrow{EB_1} = 0$.

Следовательно,

$$\begin{cases} 2m(x+1-y)\cdot 2m + \left(-2m\sqrt{3}y\right)\cdot 0 + 3m(x+y)\cdot 3m = 0 \\ 2m(x+1-y)\cdot(-2m) - \left(-2m\sqrt{3}y\right)\cdot\left(-2m\sqrt{3}\right) + 3m(x+y)\cdot 3m = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4m^2(x+1-y) + 9m^2(x+y) = 0 \\ -4m^2(x+1-y) + 12m^2y + 9m^2(x+y) = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 4x + 4 - 4y + 9x + 9y = 0 \\ -4x - 4 + 4y + 12y + 9x + 9y = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} 13x + 5y + 4 = 0 \\ 5x + 25y - 4 = 0 \end{cases} \quad \boxed{1} + \boxed{2} \quad \begin{cases} 18x + 30y = 0 \\ 5x + 25y - 4 = 0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}y \\ 5\cdot\left(-\dfrac{5}{3}y\right) + 25y - 4 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\dfrac{5}{3}y \\ y = \dfrac{6}{25} \end{cases}; \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{6}{25} \end{cases}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{L_1L_2}\ \left\{2m\left(-\frac{2}{5}+1-\frac{6}{25}\right); -2m\sqrt{3}\cdot\frac{6}{25}; 3m\left(-\frac{2}{5}+\frac{6}{25}\right)\right\} =$$

$$= \overrightarrow{L_1L_2}\ \left\{\frac{18}{25}m; -\frac{12\sqrt{3}}{25}m; -\frac{12}{25}m\right\};$$

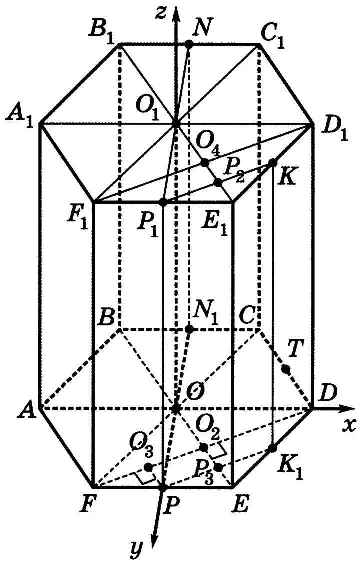
$$\left|\overrightarrow{L_1L_2}\right| = \sqrt{\left(\frac{18}{25}m\right)^2 + \left(-\frac{12\sqrt{3}}{25}m\right)^2 + \left(-\frac{12}{25}m\right)^2} =$$

$$= \frac{m}{25}\sqrt{324+432+144} = \frac{m}{25}\sqrt{900} = \frac{30}{25}m = 1{,}2m.$$

Итак, $\boxed{\rho\left(FE_1; EB_1\right) = 1{,}2m}$.

Самостоятельная работа 4 (Использование различных методов для нахождения углов и расстояний)

В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ отношение длин ребер, исходящих из одной вершины, равно $3:2:2$, где AA_1 — наибольшее ребро.



Пусть точки N, K, T и P — середины ребер B_1C_1, D_1E_1, CD и FE соответственно. Найдите:

Вариант 1

а) $\cos\left(\widehat{FE_1; ED_1}\right)$

б) $\rho(B; FE_1)$

Вариант 2

а) $\left(\widehat{A_1P; NA}\right)$

б) $\rho(N; BD_1)$

Вариант 3

а) $\cos(TE_1; PA_1)$

б) $\rho(FF_1; NT)$

Вариант 4

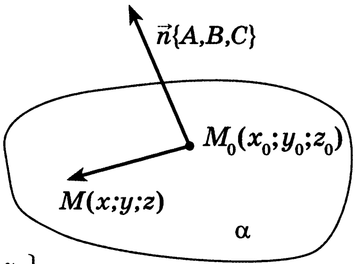
а) $\cos(FK; B_1T)$

б*) $\rho(FK; B_1T)$

Уравнение плоскости

Кратко напомним вывод уравнения плоскости.

Пусть $\vec{n} \perp \alpha$, где $\vec{n}\ \{A; B; C\}$;
$M_0 \in \alpha$, где $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$;
$M \in \alpha$, где $M\ (x; y; z)$.



Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$,
причем $\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0\ \ (\vec{n} \perp \alpha)$.
Значит $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.
Такое уравнение называется уравнением плоскости, которой принадлежит точка $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$.
Преобразуя, получим: $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$.
Обозначая $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$, получим общий вид уравнения плоскости: $\boxed{Ax + By + Cz + D = 0}$.
Особо напомним, что коэффициенты при неизвестных в уравнении составляют коэффициенты вектора $\vec{n}\ (A; B; C)$, перпендикулярного данной плоскости.

Задача 1. Точки $N_1\ (1; 1; -1)$, $N_2\ (2; -1; 1)$ и $N_3\ (-1; 1; 1)$ принадлежат плоскости α. Напишите уравнение плоскости α.

Напишем систему трех уравнений с тремя неизвестными, используя уравнение плоскости и подставляя в него координаты данных точек:

$$\begin{cases} Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \\ Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0 \\ Ax_3 + By_3 + Cz_3 + D = 0 \end{cases};$$

$$\begin{array}{l} \text{для } N_1 \\ \text{для } N_2 \\ \text{для } N_3 \end{array} \quad \begin{cases} A + B - C + D = 0 \\ 2A - B + C + D = 0 \quad 2\boxed{1} - \boxed{2} \\ -A + B + C + D = 0 \quad \boxed{1} + \boxed{3} \end{cases};$$

$$\begin{cases} A+B-C+D=0 \\ 0+3B-3C+D=0 \\ 0+2B+0+2D=0 \end{cases}; \quad \begin{cases} A+B-C+D=0 \\ -3D-3C+D=0 \\ B=-D \end{cases}; \quad \begin{cases} A=-\frac{2}{3}D \\ C=-\frac{2}{3}D \\ B=-D \end{cases}.$$

Подставляя в общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$, получим $-\frac{2}{3}Dx-Dy-\frac{2}{3}Dz+D=0$.

Умножим на 3 и сократим на $(-D)$,

значит $\boxed{2x+3y+2z-3=0}$. Это уравнение плоскости, которой принадлежат точки N_1, N_2 и N_3.

Задача 2. Вершины треугольника определены точками $A\ (1;2;3)$, $B\ (3;1;2)$ и $C\ (2;2;1)$. Найдите площадь такого треугольника.

> **Пусть $A\ (x_1;y_1;z_1)$ и $B\ (x_2;y_2;z_2)$.**
> $\overrightarrow{AB}\ \{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$. **Тогда**
> $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

> **Пусть $\vec{a}\ \{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}\ \{x_2;y_2;z_2\}$.**
> $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2+y_1\cdot y_2+z_1\cdot z_2$;
> $\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$.

а) $\overrightarrow{AB}\ \{2;-1;-1\}$; $\quad \overrightarrow{AC}\ \{1;0;-2\}$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2+(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{6};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{1^2+0^2+(-2)^2} = \sqrt{5}.$$

б) $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \frac{2\cdot1+(-1)\cdot0+(-1)\cdot(-2)}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{30}}$.

в) $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \sqrt{1-\frac{16}{30}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}}$.

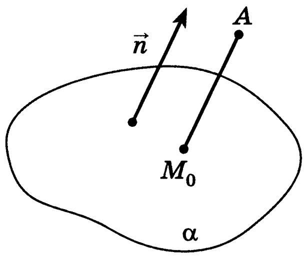
г) $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\left(\widehat{AB; AC}\right)$.

Так как

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|, \quad AC = \left|\overrightarrow{AC}\right|, \quad \sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \sin\left(\widehat{AB; AC}\right),$$

то $S_{\triangle} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{5} \cdot \dfrac{\sqrt{14}}{\sqrt{30}} = \dfrac{\sqrt{14}}{2} = \boxed{\sqrt{3{,}5}}$.

Задача 3. Найдите расстояние от точки $A\ (1; 2; -7)$ до плоскости α, заданной уравнением $12x + 4y + 3z - 4 = 0$.



Из условия задачи следует, что $\vec{n}\ \{12; 4; 3\}$ (так как $A = 12,\ B = 4,\ C = 3$), причем $\vec{n} \perp \alpha$.

а) Пусть $\overrightarrow{AM_0} \parallel \vec{n}$, где $M_0 \in \alpha$ и $M_0\ (x_0; y_0; z_0)$.
Тогда $\overrightarrow{AM_0}\ \{x_0 - 1; y_0 - 2; z_0 + 7\}$.

б) Так как $\overrightarrow{AM_0} \parallel \vec{n}$, то существует такое $p \neq 0$, что $\overrightarrow{AM_0} = p\vec{n}$.

Значит

$$\begin{cases} x_0 - 1 = 12p \\ y_0 - 2 = 4p \\ z_0 + 7 = 3p \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} x_0 = 12p + 1 \\ y_0 = 4p + 2 \\ z_0 = 3p - 7 \end{cases}.$$

Если учесть, что $M_0 \in \alpha$, а значит, выполняется равенство $12x_0 + 4y_0 + 3z_0 - 4 = 0$, получим уравнение относительно p, подставляя найденные координаты точки M_0 в уравнение плоскости α. Найдем p:

$$12 \cdot (12p + 1) + 4 \cdot (4p + 2) + 3 \cdot (3p - 7) - 4 = 0; \quad p = \frac{5}{169}.$$

в) $\left|\overrightarrow{AM_0}\right| = \sqrt{(x_0-1)^2+(y_0-2)^2+(z_0+7)^2} =$
$= \sqrt{(12p)^2+(4p)^2+(3p)^2} = 13|p|.$

Так как $\left|\overrightarrow{AM_0}\right| = 13|p|$, то $\left|\overrightarrow{AM_0}\right| = 13\cdot\dfrac{5}{169} = \dfrac{5}{13}$.

А поскольку $\rho(A;\alpha) = \left|\overrightarrow{AM_0}\right|$, то $\boxed{\rho(A;\alpha) = \dfrac{5}{13}}$.

Задача 4. Параллелепипед задан четырьмя вершинами, не принадлежащими одной грани: A $(1;1;-2)$, B $(-1;1;1)$, C $(1;-1;2)$ и D_1 $(2;1;-1)$. Найдите объем такого параллелепипеда.

а) Пусть плоскость α определена данными точками A, B и C. Пусть она задается уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

Внимание! Здесь очень важно понимать, где буквы A, B, C и D обозначают коэффициенты в уравнении плоскости, а где — вершины данного параллелепипеда или вектора. Увы, в данном случае в силу сложившихся традиций эти буквы выступают в разных смыслах. К счастью, из контекста всегда ясно, что имеется в виду.

Из принадлежности плоскости α точек A, B и C следует, что можно составить систему уравнений. В нем фигурируют коэффициенты A, B, C и D данного уравнения плоскости, которые необходимо найти:

$$\begin{cases} A+B-2C+D=0 & \boxed{1}+\boxed{3} \\ -A+B+C+D=0 & \boxed{2}+\boxed{3} \\ A-B+2C+D=0 & \boxed{1}+\boxed{2} \end{cases}; \quad \begin{cases} 2A+2D=0 \\ 3C+2D=0 \\ 2B-C+2D=0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} A=-D \\ C=-\dfrac{2}{3}D \\ 2B+\dfrac{2}{3}D+2D=0 \end{cases}, \text{ т. е. } \begin{cases} A=-D \\ C=-\dfrac{2}{3}D \\ B=-\dfrac{4}{3}D \end{cases}.$$

Значит уравнение плоскости принимает вид

$-Dx-\dfrac{4}{3}Dy-\dfrac{2}{3}Dz+D=0$, или $\boxed{\alpha\colon 3x+4y+2z-3=0}$.

б) Найдем высоту данного параллелепипеда, которая равна расстоянию от вершины D_1 до плоскости основания, т. е. до плоскости α. Иначе говоря, найдем $\rho(D_1;\alpha)$, где $\vec{n}\ \{3;4;2\}$, $\vec{n}\perp\alpha$.

Напомним, что $\vec{n}\ \{A;B;C\}$.

1. Пусть точка $M_0 \in \alpha$ и $\overrightarrow{D_1M_1} \parallel \vec{n}$, где $M_0\ (x_0;y_0;z_0)$.

   Тогда $\overrightarrow{D_1M_0}\ \{x_0-2;y_0-1;z_0+1\}$.

   Так как $\overrightarrow{D_1M_0} \parallel \vec{n}$, то существует такое $p \neq 0$, что $\overrightarrow{D_1M_0} = p\vec{n}$.

   Тогда $\begin{cases} x_0-2=3p \\ y_0-1=4p \\ z_0+1=2p \end{cases}$; $\begin{cases} x_0=3p+2 \\ y_0=4p+1 \\ z_0=2p-1 \end{cases}$.

   Учитывая, что $M_0 \in \alpha$, получаем уравнение

   $3(3p+2)+4(4p+1)+2(2p-1)-3=0;\quad p=-\dfrac{5}{29}$.

2. $\left|\overrightarrow{D_1M_0}\right| = \sqrt{(x_0-2)^2+(y_0-1)^2+(z_0+1)^2} =$

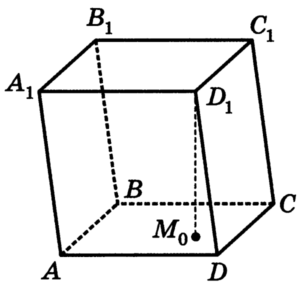
   $= \sqrt{(3p)^2+(4p)^2+(2p)^2} = |p|\sqrt{29}$.

   $\left|\overrightarrow{D_1M_0}\right| = |p|\sqrt{29}$, значит

   $\left|\overrightarrow{D_1M_0}\right| = \dfrac{5\sqrt{29}}{29};\quad \rho(D_1;\alpha)=\dfrac{5\sqrt{29}}{29}$.

   По смыслу задачи мы тем самым нашли высоту параллелепипеда, опущенную на грань $ABCD$.

в) Теперь найдем площадь этого основания, т. е. S_{ABCD}.



1. $\overrightarrow{AB}\,\{-2; 0; 3\}$, $\quad \overrightarrow{AC}\,\{0; -2; 4\}$.

2. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$;

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{-2\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 3\cdot 4}{\sqrt{(-2)^2+0^2+3^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+4^2}} =$$

$$= \frac{12}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}};$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \sqrt{1 - \frac{12^2}{13\cdot 20}} =$$

$$= \frac{\sqrt{116}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}} = \frac{2\sqrt{29}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}}.$$

3. $S_{ABCD} = AB\cdot AC\cdot\sin\left(\widehat{AB; AC}\right)$

$\left(S_{ABCD} = 2S_{\triangle BAC}\right)$.

Так как $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB = \sqrt{13}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = AC = \sqrt{20}$,

$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \sin\left(\widehat{AB; AC}\right)$,

то $S_{ABCD} = \sqrt{13}\cdot\sqrt{20}\cdot\dfrac{2\sqrt{29}}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{20}} = \boxed{2\sqrt{29}}$.

г) $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD}\cdot H_{ABCD}$;

$$V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 2\sqrt{29}\cdot\frac{5\sqrt{29}}{29} = \boxed{10}.$$

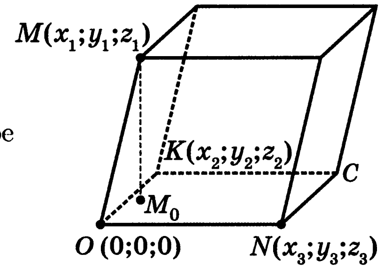
Примечание. Удивительно, но в результате вычисления получили, что объем параллелепипеда есть целое число. Что это, случайность или закономерность? Можно доказать, что если координаты четырех вершин параллелепипеда, не принадлежащих одной грани, имеют целочисленные координаты, то объем этого параллелепипеда есть целое число.

Покажем это.

Пусть x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 — целые числа.

Докажем, что тогда $V_{\text{пар}}$ — целое число.

Пусть $O\ (0;0;0)$, $M\ (x_1;y_1;z_1)$, $K\ (x_1;y_2;z_2)$, $N\ (x_3;y_3;z_3)$.



а) α: $OKCN$.

$$\begin{matrix} O\in\alpha \\ K\in\alpha \\ N\in\alpha \end{matrix}\quad \begin{cases} A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0 \\ A\cdot x_2+B\cdot y_2+C\cdot z_2+D=0\,; \\ A\cdot x_3+B\cdot y_3+C\cdot z_3+D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=0 \\ x_2A+y_2B+z_2C+D=0\ \cdot x_3\ (x_3\neq 0)\,, \\ x_3A+y_3B+z_3C+D=0\ \cdot x_2\ (x_2\neq 0) \end{cases}$$

т. е. уравнение α: $Ax+By+Cz=0$.

$$\begin{cases} Ax_2x_3+Bx_3y_2+Cz_2x_3=0 \\ Ax_2x_3+Bx_2y_3+Cz_3x_2=0 \end{cases}\quad \boxed{1}-\boxed{2}$$

$$(x_3y_2-x_2y_3)\,B=(z_3x_2-z_2x_3)C.$$

Положим $y_2x_3-y_3x_2\neq 0$, тогда $B=C\cdot\dfrac{z_3x_2-z_2x_3}{y_2x_3-y_3x_2}$.

Используя $Ax_2+By_2+Cz_2=0$, найдем A:

$$Ax_2+C\cdot\frac{z_3x_2-z_2x_3}{y_2x_3-y_3x_2}\cdot y_2+Cz_2=0;$$

$$A=\frac{(z_2x_3-z_3x_2)\,y_2-(y_2x_3-y_3x_2)\,z_2}{x_2\,(x_3y_2-x_2y_3)}\cdot C=\frac{y_3z_2-y_2z_3}{x_3y_2-x_2y_3}\cdot C.$$

Подставим в уравнение $Ax_2 + By_2 + Cz_2 = 0$:

$C \cdot \dfrac{y_3z_2 - y_2z_3}{x_3y_2 - x_2y_3} \cdot x_2 + C \cdot \dfrac{z_3x_2 - z_2x_3}{x_3y_2 - x_2y_3} \cdot y_2 + Cz_2 = 0.$

Умножим на $x_3y_2 - x_2y_3 \neq 0$ и сократим на $C \neq 0$, получим

$(y_3z_2 - y_2z_3)\,x_2 + (z_3x_2 - z_2x_3)\,y_2 + (x_3y_2 - x_2y_3)\,z_2 = 0.$

Тогда положим $A = y_3z_2 - y_2z_3, \quad B = z_3x_2 - z_2x_3,$

$C = x_3y_2 - x_2y_3.$

Получили $Ax + By + Cz = 0$, причем $\vec{n}\,\{A; B; C\}$.

б) Рассмотрим $\overrightarrow{OK}\,\{x_2; y_2; z_2\}$ и $\overrightarrow{ON}\,\{x_3; y_3; z_3\}$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{ON}}\right) = \frac{x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}};$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{ON}}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\widehat{\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{ON}}\right)} =$$

$$= \sqrt{\frac{\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\left(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2\right) - (x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3)^2}{\left(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2\right)\left(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2\right)}} =$$

$$= \frac{\sqrt{(y_3z_2 - y_2z_3)^2 + (z_3x_2 - z_2x_3)^2 + (x_3y_2 - x_2y_3)^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\left|\overrightarrow{OB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON}\right|}.$$

Итак, $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OK}; \overrightarrow{ON}}\right) = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\left|\overrightarrow{OK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON}\right|} =$

$$= \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \cdot \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2}}.$$

в) $M_0M \perp OKN$,

т. е. $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{n}\,\{A; B; C\}$ и $\overrightarrow{M_0M} \perp \alpha$: $\overrightarrow{OM}\,\{x_1; y_1; z_1\}$.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{M_0M}}\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM}; \vec{n}}\right) =$$

$$= \frac{x_1A + y_1B + z_1C}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

С другой стороны, $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \left|\overrightarrow{OM}\right| \cdot \cos\left(\widehat{\overrightarrow{OM};\vec{n}}\right) =$

$$= \frac{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,(x_1A+y_1B+z_1C)}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,(A^2+B^2+C^2)} = \frac{x_1A+y_1B+z_1C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

В общем виде $\boxed{\rho(M;\alpha) = \dfrac{|x_1A+y_1B+z_1C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$,

где $M\ (x_1;y_1;z_1)$ и $Ax+By+Cz+D=0$.

Очевидно, что $\left|\overrightarrow{M_0M}\right| = H_{\text{пар}}$ — высота параллелепипеда.
Далее см. рис. на с. 354.

$S_{OKCN} = \left|\overrightarrow{OK}\right| \cdot \left|\overrightarrow{ON}\right| \cdot \sin\left(\widehat{OK;ON}\right)$, так как

$\left|\overrightarrow{OK}\right| = OK$, $\left|\overrightarrow{ON}\right| = ON$, $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{OK};\overrightarrow{ON}}\right) = \sin\left(\widehat{OK;ON}\right)$,

значит

$$S_{OKCN} = \frac{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cdot\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cdot\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}} =$$

$$= \sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

г) $V_{\text{пар}} = S_{OKCN} \cdot H_{\text{пар}}$;

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\frac{x_1A+y_1B+z_1C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = x_1A+y_1B+z_1C =$$

$= x_1(y_3z_2-y_2z_3)+y_1(z_3x_2-z_2x_3)+z_1(x_3y_2-x_2y_3)$ — целое число как алгебраическая комбинация суммы, произведения и разности целых чисел.

Если знать теорию определителей, то $V_{\text{пар}} = \left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix} \right\|$,

где $O\ (0;0;0)$, $M\ (x_1;y_1;z_1)$, $K\ (x_2;y_2;z_2)$, $N\ (x_3;y_3;z_3)$.

Примечание. Для доказательства в общем виде необходимо рассмотреть еще и случаи: $x_2=0$, $x_3=0$, $x_3y_2-x_2y_3=0$ и т. д. Важно понимать, как изменяются координаты вершин параллелепипеда при параллельном переносе на вектор $\vec{m}\,\{x_0;y_0;z_0\}$, учитывая, что при этом объем параллелепипеда не изменяется.

Тренировочная работа 10 (Применение координатно-векторного метода для решения задач)

1. а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A\ (5;-1;3)$, $B\ (2;-2;4)$.

б) Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатным векторам.

2. Найдите координаты середины отрезка BC, если $B\left(6;-\frac{1}{2};8\right)$ и $C\ (12;6;-1)$.

3. Даны векторы $\vec{b}\,\{3;1;-2\}$ и $\vec{c}\,\{1;4;-3\}$. Найдите: а) $|\vec{b}|$; б) $|2\vec{b}-\vec{c}|$.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 2. Вычислите:

а) $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}$;

в) $\left(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\overrightarrow{AC}}\right)$;

г) $\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right)$.

5. Даны векторы $\vec{a}\,\{0;1;-2\}$ и $\vec{b}\,\{-2;1;-1\}$.

а) Найдите $\vec{a}\cdot\vec{b}$. б) Определите вид угла $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$.

6. Вычислите $\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$, где $\vec{a}=-\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$.

7. Даны точки A, B и C, причем $\overrightarrow{AB}\ \{1;-2;-3\}$ и $\overrightarrow{BC}\ \{-2;4;6\}$. Принадлежат ли точки A, B и C одной прямой?

8. Вектор $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, где $\vec{b}\ \{-2;2;1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=12$.

9. Выясните компланарность векторов $\vec{a}\{2;-1;3\}$, $\vec{b}\{1;3;-2\}$ и $\vec{c}\{3;2;1\}$.

10. Разложите вектор $\vec{p}\{1;1;1\}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}\{1;1;-2\}$, $\vec{b}\{1;-1;0\}$ и $\vec{c}\{0;2;3\}$.

11. Координаты вершин параллелепипеда, не принадлежащие одной грани: $A\ (1;-1;-1)$, $B\ (2;3;4)$, $C\ (3;-2;1)$ и $D_1\ (-1;2;2)$.

Вычислите:

а) объем параллелепипеда;

б) $\left(\widehat{A_1DC_1; BDC}\right)$;

в) $\left(\widehat{A_1C; ADC}\right)$.

Решение тренировочной работы 10

1. а) Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A\ (5;-1;3)$, $B\ (2;-2;4)$.

$\overrightarrow{AB}\ \{2-5;-2-(-1);4-3\} = \overrightarrow{AB}\ \{-3;-1;1\}$.

б) Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по координатным векторам.

$\overrightarrow{AB}\ \{-3;-1;1\} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$.

2. Найдите координаты середины отрезка BC,

если $B\left(6;-\dfrac{1}{2};8\right)$ и $C\ (12;6;-1)$.

Пусть $BM = MC$ и $M \in BC$,

тогда $M\left(\dfrac{6+12}{2};\dfrac{-\frac{1}{2}+6}{2};\dfrac{8+(-1)}{2}\right) = M\ (9;2{,}75;3{,}5)$.

3. Даны векторы $\vec{b}\ \{3;1;-2\}$ и $\vec{c}\ \{1;4;-3\}$.

Найдите: а) $|\vec{b}|$; б) $|2\vec{b}-\vec{c}|$.

а) $|\vec{b}| = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2} = \boxed{\sqrt{14}}$.

б) Найдем $|2\vec{b}-\vec{c}|$.

Пусть $2\vec{b}-\vec{c} = \vec{m}$.

$\vec{m}\ \{2\cdot 3-1;2\cdot 1-4;2\cdot(-2)-(-3)\} = \vec{m}\ \{5;-2;-1\}$;

$|2\vec{b}-\vec{c}| = |\vec{m}| = \sqrt{5^2+(-2)^2+(-1)^2} = \boxed{\sqrt{30}}$.

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно 2.

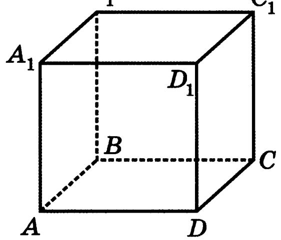
Вычислите:

а) $\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{DC}$;

б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1}$;

в) $\left(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\overrightarrow{AC}}\right)$;

г) $\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right)$.



Рассмотрим *первый (векторный) способ.*

Введем базисные векторы: $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$.

Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, то $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = t$,

и $\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\vec{b};\vec{c}}\right) = 90°$, $\left(\widehat{\vec{a};\vec{c}}\right) = 90°$.

а) Вычислим $\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{DC}$.

$\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AD} = -\vec{a} + \vec{c}$;

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} = \vec{b}$;

$\overrightarrow{A_1D} \cdot \overrightarrow{DC} = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{0}$,

так как $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$ $(\vec{c} \perp \vec{b})$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ $(\vec{a} \perp \vec{b})$.

б) Найдем $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}$.

$\overrightarrow{AB} = \vec{b}$;

$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1D_1} + \overrightarrow{D_1C_1} = \vec{c} + \vec{b}$;

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = \vec{b} \cdot (\vec{c} + \vec{b}) = \underline{\vec{b} \cdot \vec{c}} + \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = t^2 = 2^2 = \boxed{4}$.

в) Найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\overrightarrow{AC}}\right)$.

$\overrightarrow{DB_1} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{A_1B_1} = -\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}$;

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \vec{c} + \vec{b}$;

$\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{AC} = (\vec{c} + \vec{b})(-\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}) =$

$= -\vec{c}^2 + \underline{\vec{c} \cdot \vec{a}} + \vec{c} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} + \underline{\vec{b} \cdot \vec{a}} + \vec{b}^2 = -|\vec{c}|^2 + |\vec{b}|^2 = -t^2 + t^2 = 0$,

значит $\left(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\overrightarrow{AC}}\right) = 90°$.

г) Найдем $\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right)$.

$\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1} = \vec{c} + \vec{a}$;

$\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{b} + \vec{a}$.

$\overrightarrow{AD_1} \cdot \overrightarrow{DC_1} = (\vec{c} + \vec{a})(\vec{b} + \vec{a}) = \underline{\vec{c} \cdot \vec{b}} + \underline{\vec{a} \cdot \vec{b}} + \underline{\vec{a} \cdot \vec{c}} + \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = t^2$.

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AD_1}^2} = \sqrt{(\vec{c}+\vec{a})^2} = \sqrt{\vec{c}^2 + 2\vec{c}\cdot\vec{a} + \vec{a}^2} =$$

$$= \sqrt{|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2} = \sqrt{t^2+t^2} = \sqrt{2}t.$$

$$\overrightarrow{DC_1} = \sqrt{\overrightarrow{DC_1}^2} = \sqrt{(\vec{b}+\vec{a})^2} = \sqrt{\vec{b}^2 + 2\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}} + \vec{a}^2} =$$

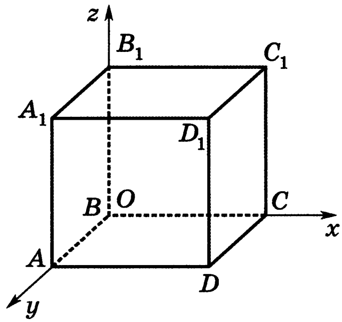
$$= \sqrt{|\vec{b}|^2 + |\vec{a}|^2} = \sqrt{t^2+t^2} = \sqrt{2}t.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right) = \frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC_1}\right|} = \frac{t^2}{\left(\sqrt{2}t\right)^2} = \frac{1}{2},$$

значит $\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right) = 60^\circ$.

(Напомним, что подчеркнутые скалярные произведения векторов равны нулю.)

Теперь рассмотрим *второй метод решения — координатный*. Введем систему координат:



BB_1 — ось Oz;

BC — ось Ox;

BA — ось Oy.

Тогда получим координаты вершин:

$A\ (0;2;0)$, $A_1\ (0;2;2)$,

$B\ (0;0;0)$, $B_1\ (0;0;2)$,

$C\ (2;0;0)$, $C_1\ (2;0;2)$,

$D\ (2;2;0)$, $D_1\ (2;2;2)$.

а) $\overrightarrow{A_1D}\ \{2;0;-2\}$; $\overrightarrow{DC}\ \{0;2;0\}$;

$\overrightarrow{A_1D}\cdot\overrightarrow{DC} = 2\cdot 0 + 0\cdot 2 + (-2)\cdot 0 = \boxed{0}$.

б) $\overrightarrow{AB}\ \{0;-2;0\}$; $\overrightarrow{A_1C_1}\ \{2;-2;0\}$;

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A_1C_1} = 0\cdot 2 + (-2)\cdot(-2) + 0\cdot 0 = \boxed{4}$.

в) $\overrightarrow{DB_1}\ \{-2;-2;2\}$; $\quad \overrightarrow{AC}\ \{2;-2;0\}$;

$$\left(\widehat{\overrightarrow{DB_1};\overrightarrow{AC}}\right) = -2\cdot 2 + 2\cdot 2 + 2\cdot 0 = 0,$$

значит $\overrightarrow{DB_1}\perp\overrightarrow{AC}$.

г) $\overrightarrow{AD_1}\ \{2;0;2\}$; $\quad \overrightarrow{DC_1}\ \{0;-2;2\}$;

$$\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DC_1} = 2\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 2 = 4.$$

$$\left|\overrightarrow{AD_1}\right| = \sqrt{2^2+0^2+2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\left|\overrightarrow{DC_1}\right| = \sqrt{0^2+(-2)^2+2^2} = 2\sqrt{2};$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right) = \frac{\overrightarrow{AD_1}\cdot\overrightarrow{DC_1}}{\left|\overrightarrow{AD_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DC_1}\right|} = \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2};$$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right) = 60^\circ.$$

Примечания

1. Зная формулу

$$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right) = \frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}},$$

где $\vec{a}\ \{x_1;y_1;z_1\}$, $\quad \vec{b}\ \{x_2;y_2;z_2\}$,

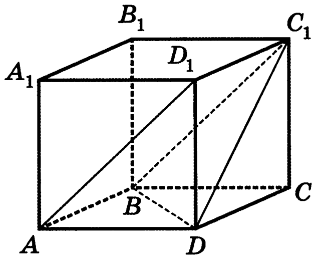
можно было сразу подставить координаты векторов $\overrightarrow{AD_1}$ и $\overrightarrow{DC_1}$, т. е.

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1};\overrightarrow{DC_1}}\right) = \frac{2\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 2\cdot 2}{\sqrt{2^2+0^2+2^2}\cdot\sqrt{0^2+(-2)^2+2^2}} =$$

$$= \frac{4}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}, \text{ и т. д.}$$

2. Хотелось бы отметить наличие следующего изящного и короткого геометрического решения.

Третий способ



а) Очевидно, что $\overrightarrow{AD_1} = \overrightarrow{BC_1}$.

б) В $\triangle DBC_1$ $DB = BC_1 = DC_1$ как диагонали граней, т. е. $\triangle DBC_1$ — равносторонний.

Значит $\angle BC_1D = 60°$, или $\left(\widehat{\overrightarrow{AD_1}; \overrightarrow{DC_1}}\right) = 60°$

(можно рассмотреть $\triangle B_1AD_1$, в котором $\overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{DC_1}$).

5. Даны векторы $\vec{a}\,\{0; 1; -2\}$ и $\vec{b}\,\{-2; 1; -1\}$.

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-1) = 3$.

б) Определим вид угла $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$.

$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$;

$|\vec{a}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$;

$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$.

Значит $\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \dfrac{3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}} = 0{,}1\sqrt{30} > 0$.

Следовательно, $\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right)$ — острый.

6. Вычислите $\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$, где $\vec{a}=-\vec{i}+7\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$.

$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-1)\cdot(-2)+7\cdot 5+2\cdot(-1)=35;$

$|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+7^2+2^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6};$

$|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+5^2+(-1)^2}=\sqrt{30};$

$\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\dfrac{35}{3\sqrt{6}\cdot\sqrt{30}}=\dfrac{7\sqrt{5}}{18};$ $\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)=\dfrac{7\sqrt{5}}{18}}.$

7. Даны точки A, B и C, причем $\overrightarrow{AB}$ $\{1;-2;-3\}$ и $\overrightarrow{BC}$ $\{-2;4;6\}$. Принадлежат ли точки A, B и C одной прямой?

Это возможно только если $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, т. е. существует $k\neq 0$, такое что $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BC}$.

Значит $\begin{cases}1=-2k\\-2=4k\\-3=6k\end{cases}$, т. е. $k=-\dfrac{1}{2}$.

В этом случае точки A, B и C принадлежат одной прямой.

8. Вектор $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, где $\vec{b}$ $\{-2;2;1\}$. Найдите координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=12$.

Так как векторы сонаправлены, то существует $k>0$, такое что $\vec{a}=k\vec{b}$. Значит $|\vec{a}|=k|\vec{b}|$, $|\vec{b}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=4$, тогда $12=3k$; $k=4$.

Следовательно, $\begin{cases}x_1=4\cdot(-2)\\y_1=4\cdot 2\\z_1=4\cdot 1\end{cases}$, где $\vec{a}$ $\{x_1;y_1;z_1\}$.

Таким образом, координаты вектора $\vec{a}$ $\{-8;8;4\}$.

9. Выясните компланарность векторов $\vec{a}\{2;-1;3\}$, $\vec{b}\{1;3;-2\}$ и $\vec{c}\{3;2;1\}$.

Если эти векторы компланарны, то существуют такие x и y, что $\vec{c}=x\vec{b}+y\vec{a}$, причем $xy\neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} 3=x\cdot 1+y\cdot 2 \\ 2=x\cdot 3+y\cdot(-1) \\ 1=x\cdot(-2)+y\cdot 3 \end{cases};\quad \begin{cases} x=3-2y \\ 2=3(3-2y)-y \\ 1=-2(3-2y)+3y \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=3-2y \\ y=1 \\ y=1 \end{cases};\quad \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}.$$

Следовательно, $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, значит $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

10. Разложите вектор $\vec{p}\{1;1;1\}$ по трем некомпланарным векторам $\vec{a}\{1;1;-2\}$, $\vec{b}\{1;-1;0\}$ и $\vec{c}\{0;2;3\}$.

Для того чтобы это было возможно, должны существовать числа x, y и z, такие что $\vec{p}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ и $xyz\neq 0$.

$$\begin{cases} 1=x+y \qquad \boxed{1}+\boxed{2}+\boxed{3} \\ 1=x-y+2z \\ 1=-2x+3z \end{cases};$$

$$\begin{cases} 5z=3 \\ x-y+2z=1 \\ -2x+3z=1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{3}{5} \\ x-y=1-\dfrac{6}{5} \\ x=\left(3\cdot\dfrac{3}{5}-1\right)\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases};\quad \begin{cases} z=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{2}{5} \\ y=\dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Тогда $\boxed{\vec{p}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{3}{5}\vec{c}}$.

11. Координаты вершин параллелепипеда, не принадлежащие одной грани: $A\ (1;-1;-1)$, $B\ (2;3;4)$, $C\ (3;-2;1)$ и $D_1\ (-1;2;2)$.

а) Вычислим объем параллелепипеда.

1. Точки A, B и C принадлежат одной плоскости α. Подставляя их координаты в уравнение плоскости, получим:

$$\begin{matrix} A\in\alpha \\ B\in\alpha \\ C\in\alpha \end{matrix}\quad \begin{cases} x-y-z+D=0 \\ 2x+3y+4z+D=0 & 2\cdot\boxed{1}-\boxed{2}\ ; \\ 3x-2y+z+D=0 & 3\cdot\boxed{1}-\boxed{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z+D=0 \\ 0-5y-6z+D=0 & 5\cdot\boxed{3}-\boxed{2}\ ; \\ 0-y-4z+2D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y-z+D=0 \\ 0-14z+9D=0\ ; \\ -y-4z+2D=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{9}{14}D-\dfrac{8}{14}D-D \\ z=\dfrac{9}{14}D \\ y=-4\cdot\dfrac{9}{14}D+2D=-\dfrac{8}{14}D \end{cases};\quad \begin{cases} x=-\dfrac{13}{14}D \\ y=-\dfrac{8}{14}D\ , \\ z=\dfrac{9}{14}D \end{cases}$$

тогда $-\dfrac{13}{14}Dx-\dfrac{8}{14}Dy+\dfrac{9}{14}Dz+D=0$,

значит $\boxed{13x+8y-9z-14=0}$ — уравнение плоскости α.

2. Используем общую формулу

$\rho(M;\alpha)=\dfrac{|x_1A+y_1B+z_1C+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, где $M\ (x_1;y_1;z_1)$ и α задана уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\rho(D_1;\alpha)=\frac{|13\cdot(-1)+2\cdot8+2\cdot(-9)-14|}{\sqrt{13^2+8^2+9^2}}=\frac{29}{\sqrt{314}}.$$

Итак, высота $H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}=\rho(D_1;\alpha)=\dfrac{29}{\sqrt{314}}$.

3. Теперь найдем S_{ABCD}.

$$S_{ABCD} = AB \cdot AC \cdot \sin\left(\widehat{AB; AC}\right) \quad \left(S_{ABCD} = 2S_{\triangle BAC}\right).$$

Найдем $\overrightarrow{AB}\ \{1; 4; 5\}$, $\quad \overrightarrow{AC}\ \{2; -1; 2\}$.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + 16 + 25} = \sqrt{42};$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3;$$

$$AB = \left|\overrightarrow{AB}\right|; \quad AC = \left|\overrightarrow{AC}\right|.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 5 \cdot 2}{\sqrt{42} \cdot 3} = \frac{8}{3\sqrt{42}};$$

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\sqrt{42}}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{378 - 64}{42 \cdot 9}} = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{314}{42}}.$$

Тогда так как

$$\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}}\right) = \sin\left(\widehat{AB; AC}\right) = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{314}{42}},$$

то $S_{ABCD} = 3\sqrt{42} \cdot \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{314}{42}} = \sqrt{314}$.

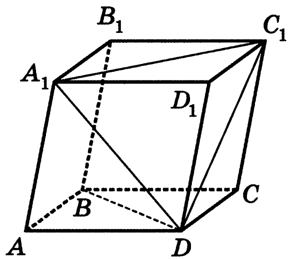
4. $V_{\text{пар}} = S_{ABCD} \cdot H_{ABCDA_1B_1C_1D_1};$

$$V_{\text{пар}} = \sqrt{314} \cdot \frac{29}{\sqrt{314}} = \boxed{29}.$$

б) Вычислим $\left(A_1 \widehat{DC_1; B} DC\right)$.

BDC есть плоскость α.

Найдем уравнение плоскости β, в которой лежит A_1DC_1. Для этого необходимо найти координаты точек A_1, D и C_1.



1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ($ABCD$ — параллелограмм).
Пусть $D\,(x_0; y_0; z_0)$, тогда
$\overrightarrow{AB}\,\{1; 4; 5\} = \overrightarrow{DC}\,\{3 - x_0; -2 - y_0; 1 - z_0\}$
$(C\,(3; -2; 1))$.
Значит $\begin{cases} 1 = 3 - x_0 \\ 4 = -2 - y_0 \\ 5 = 1 - z_0 \end{cases}$; $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -6 \\ z_0 = -4 \end{cases}$ $D\,(2; -6; -4)$.

2. Пусть $A_1\,(x_1; y_1; z_1)$.
AA_1D_1D — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{DD_1}$,
тогда $\overrightarrow{AA_1}\,\{x_1 - 1; y_1 + 1; z_1 + 1\} =$
$= \overrightarrow{DD_1}\,\{-1 - 2; 2 - (-6); 2 - (-4)\}$.
$\overrightarrow{DD_1}\,\{-3; 8; 6\}$, значит $\begin{cases} -3 = x_1 - 1 \\ 8 = y_1 + 1 \\ 6 = z_1 + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_1 = -2 \\ y_1 = 7 \\ z_1 = 5 \end{cases}$;
$A_1\,(-2; 7; 5)$.

3. Пусть $C_1\,(x_2; y_2; z_2)$.
Так как DD_1C_1C — параллелограмм,
то $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{CC_1}$,
тогда $\overrightarrow{DD_1}\,\{-3; 8; 6\} = \overrightarrow{CC_1}\,\{x_2 - 3; y_2 + 2; z_2 - 1\}$,
значит $\begin{cases} -3 = x_2 - 3 \\ 8 = y_2 + 2 \\ 6 = z_2 - 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 6 \\ z_2 = 7 \end{cases}$; $C_1\,(0; 6; 7)$.

4. Теперь мы можем найти уравнение плоскости β, в которой лежит A_1DC_1:

$$\begin{matrix} A_1 \in \beta \\ D \in \beta\ ; \\ C_1 \in \beta \end{matrix} \quad \begin{cases} -2A + 7B + 5C + D = 0 \\ 2A - 6B - 4C + D = 0 \quad \boxed{1} + \boxed{2}\ ; \\ 0 \cdot A + 6B + 7C + D = 0 \end{cases}$$

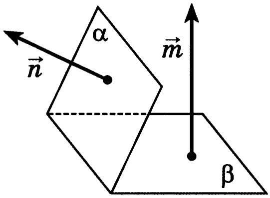
$$\begin{cases} -2A + 7B + 5C + D = 0 \\ B + C + 2D = 0 \\ 6B + 7C + D = 0 \qquad \boxed{3} - \boxed{2} \end{cases};$$

$$\begin{cases} -2A + 7B + 5C + D = 0 \\ B + C + 2D = 0 \\ C - 11D = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} A = -\dfrac{35}{2}D \\ B = -13D \\ C = 11D \end{cases};$$

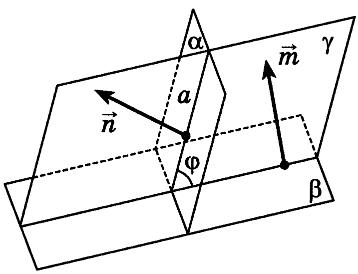
$$-\frac{35}{2}Dx - 13Dy + 11Dz + D = 0;$$

$$\boxed{\beta\colon 35x + 26y - 22z - 2 = 0}.$$

5. По определению угол между различными плоскостями всегда не тупой, т. е. $0 < \left(\widehat{\alpha;\beta}\right) \leqslant 90^\circ$, обозначим $\varphi = \left(\widehat{\alpha;\beta}\right)$.

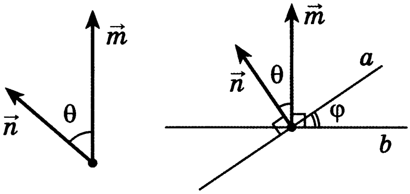


Рассмотрим перпендикулярное сечение плоскости α и β плоскостью γ, где $a = \alpha \cap \gamma$; $b = \beta \cap \gamma$.

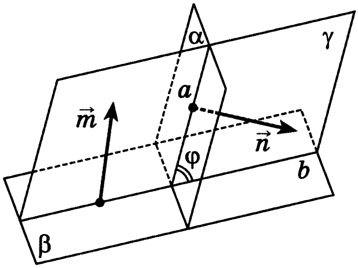


Обозначим $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)=\theta.$

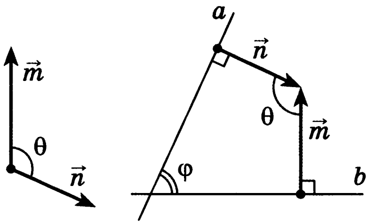
Тогда если $0<\theta\leqslant 90^\circ$, т. е. $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)\leqslant 90^\circ$, то $\theta=\varphi$.



Рассмотрим другой случай расположения векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, перпендикулярных плоскостям α и β.



В этом случае $\theta>90^\circ$, т. е. $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)>90^\circ$.



Тогда при $\theta>90^\circ$ $\varphi=180^\circ-\theta$ (так как $\varphi+\theta=180^\circ$).

Вывод.

$\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)=\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)$, где $\vec{n}\perp\alpha$, а $\vec{m}\perp\beta$,

если $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)\leqslant 90^\circ$

и $\left(\widehat{\alpha;\beta}\right)=180^\circ-\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)$, если $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right)>90^\circ$.

(Очевидно, что при $\vec{n}\uparrow\uparrow\vec{m}$ или $\vec{n}\uparrow\downarrow\vec{m}$ $\alpha\equiv\beta$.)

Известно, что $\cos\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right) = \dfrac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|}$,

где $\vec{n}\,\{13;8;-9\}$, $\vec{m}\,\{35;26;-22\}$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right) = \frac{13\cdot35+8\cdot26+9\cdot22}{\sqrt{13^2+8^2+9^2}\cdot\sqrt{35^2+26^2+22^2}} =$$

$$= \frac{455+208+198}{\sqrt{169+64+81}\cdot\sqrt{1225+676+484}} =$$

$$= \frac{861}{\sqrt{314}\cdot\sqrt{2385}} > 0,$$

значит $\left(\widehat{\vec{n};\vec{m}}\right) = \left(\widehat{\alpha;\beta}\right) = \arccos\left(\dfrac{861}{\sqrt{314}\cdot\sqrt{2385}}\right)$.

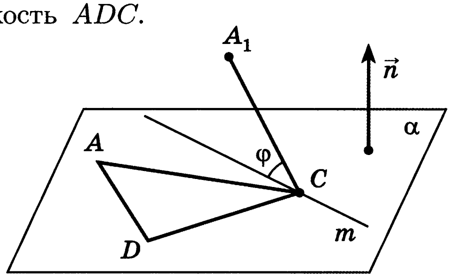
в) Вычислим $\left(\widehat{A_1C;ADC}\right)$.

Очевидно, что ADC совпадает с плоскостью $ABCD$ — плоскостью α, заданной уравнением

$13x+8y-9z-14=0$, при этом $\vec{n}\,\{13;8;-9\}$.

Вектор $\overrightarrow{A_1C}\,\{3+2;-2-7;1-5\} = \overrightarrow{A_1C}\,\{5;-9;-4\}$.

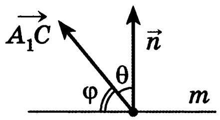
Рассмотрим ортогональную проекцию прямой A_1C на плоскость ADC.



Напомним, что за угол между прямой и плоскостью принимается не тупой угол, поэтому возможны следующие случаи.

1. Если $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) < 90^\circ$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) > 0$,

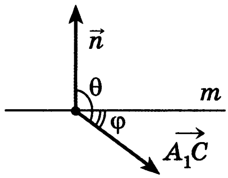
 и рисунок будет таким:



$\boxed{\varphi = 90^\circ - \theta}$.

2. Если $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) > 90^\circ$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) < 0$.

 В этом случае рисунок будет таким:



$\boxed{\varphi = \theta - 90^\circ}$.

3. Если $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 90^\circ$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 0$.

 В этом случае $A_1 \in ABCD$, и получается вырожденный параллелепипед.

4. Если $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 0^\circ$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 1$.

 Если $\theta = \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 180^\circ$, то $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = -1$.

 В этих случаях $A_1C \perp ABCD$,
 значит $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед.

В данной задаче:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = \frac{5\cdot 13 + (-9)\cdot 8 + (-4)\cdot(-9)}{\sqrt{5^2+9^2+4^2}\cdot\sqrt{13^2+8^2+9^2}} =$$

$$= \frac{29}{\sqrt{122}\cdot\sqrt{314}} > 0, \text{ тогда } \left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) < 90^\circ.$$

Следовательно $\boxed{\left(\widehat{\overrightarrow{A_1C}; \vec{n}}\right) = 90^\circ - \arccos\frac{29}{2\sqrt{61}\cdot\sqrt{157}}}$.

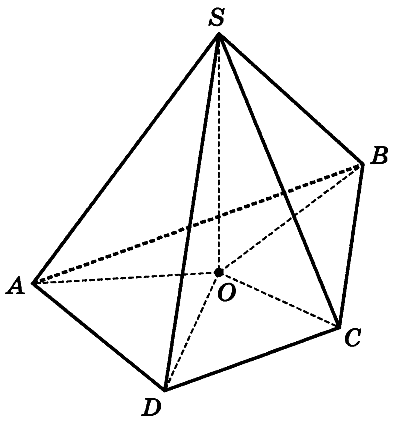
Карточки самоконтроля

Даны координаты параллелепипеда, не принадлежащие одной грани. Вычислите объем параллелепипеда.

	1	**2**	**3**	**4**
A	$(1;1;4)$	$(3;0;5)$	$(4;8;4)$	$(4;0;3)$
B	$(0;3;1)$	$(4;2;1)$	$(4;2;-1)$	$(8;-3;-2)$
C	$(5;8;2)$	$(8;-5;-3)$	$(3;0;8)$	$(2;0;1)$
D_1	$(4;-1;5)$	$(4;4;0)$	$(8;-1;-2)$	$(1;-1;-1)$
V				
	5	**6**	**7**	**8**
A	$(5;-2;1)$	$(6;2;4)$	$(7;-2;5)$	$(8;2;5)$
B	$(3;8;0)$	$(3;1;0)$	$(5;2;8)$	$(0;-5;4)$
C	$(1;-1;2)$	$(-4;-1;2)$	$(4;0;4)$	$(9;3;2)$
D_1	$(3;1;1)$	$(4;-2;3)$	$(-1;8;-2)$	$(-5;8;0)$
V				
	9	**10**	**11**	**12**
A	$(0;-2;8)$	$(1;8;-1)$	$(5;9;3)$	$(0;1;-1)$
B	$(2;-3;3)$	$(0;3;5)$	$(8;8;2)$	$(1;3;-2)$
C	$(-2;8;5)$	$(-5;-5;4)$	$(0;4;0)$	$(-3;4;2)$
D_1	$(-1;1;5)$	$(4;7;2)$	$(-2;-5;8)$	$(-2;0;-3)$
V				
	13	**14**	**15**	**16**
A	$(0;3;2)$	$(2;-3;-2)$	$(1;2;2)$	$(-1;2;3)$
B	$(3;4;0)$	$(0;-2;0)$	$(4;0;-2)$	$(0;-3;4)$
C	$(-3;1;-1)$	$(-1;0;3)$	$(3;-1;0)$	$(1;0;1)$
D_1	$(-2;4;3)$	$(3;4;-3)$	$(0;4;3)$	$(2;1;5)$
V				

Тренировочная работа 11
(Задачи стереометрии и векторные методы)

Задача. В четырехугольной пирамиде боковые ребра равны $2a$. В основании пирамиды лежит трапеция, боковая сторона и меньшее основание которой равны a. Большее основание трапеции равно боковому ребру.



Найдите:

а) угол между боковым ребром и плоскостью основания;

б) двугранный угол при боковой стороне трапеции;

в) двугранный угол при меньшем основании трапеции;

г) двугранный угол, ребро которого есть диагональ трапеции;

д) площадь полной поверхности пирамиды;

е) объем пирамиды;

ж) угол между медианой боковой грани (проходящей через боковую сторону трапеции), исходящей из вершины большего основания трапеции и непересекающейся с ней медианой боковой грани (проходящей через меньшее основание трапеции), исходящей из вершины меньшего основания;

з) угол между медианой боковой грани (проходящей через боковую сторону трапеции), исходящей из вершины большего основания трапеции и медианой боковой грани (проходящей через другую боковую сторону трапеции), исходящей из вершины меньшего основания;

и) расстояние между медианами из пункта з);

к) двугранный угол при боковом ребре, соединяющий вершину меньшего основания трапеции и вершину пирамиды.

Условия и вопросы задачи можно кратко записать следующим образом:

Дано:

$AS = BS = CS = DS = AB = 2a$
$AB \parallel DC$
$AD = DC = a$
Точки P, K и T — середины ребер SD, SC и SB.

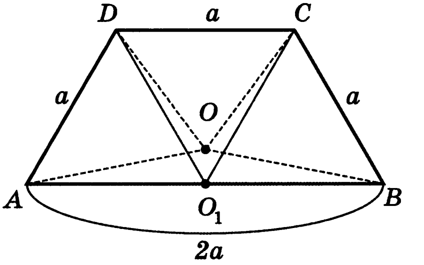
Найдите:

а) $\left(\widehat{SD; ABCD}\right)$; б) $\angle S\underline{AD}C$;
в) $\angle S\underline{DC}B$; г) $\angle S\underline{DB}A$;
д) $S_{\text{п.п.п}}$; е) V_{SABCD};
ж) $\left(\widehat{AP; DK}\right)$; з) $\left(\widehat{AP; CT}\right)$;
и) $\rho(AP; CT)$; к) $\angle A\underline{SD}C$.

а) Найдем $\left(\widehat{SD; ABCD}\right)$.

Так как боковые ребра равны между собой, то если $SO \perp ABCD$, то O — центр описанной около основания окружности, все углы между боковыми ребрами и плоскостью основания пирамиды равны между собой. Тогда $ABCD$ — равнобедренная, т. е. $AD = BC = a$.

Рассмотрим трапецию $ABCD$.

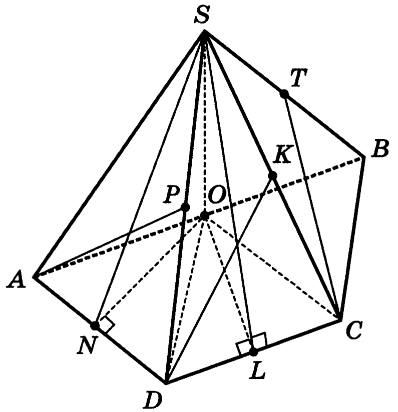


Пусть точка $O_1 \in AB$ такая, что $O_1D \parallel CB$. Тогда так как $DC \parallel O_1B$, то O_1DCB — параллелограмм, значит $DC = O_1B = a$ и $O_1D = CB$.

Следовательно, $O_1B = O_1A = O_1D$, т.е. O_1 — центр описанной около $ABCD$ окружности. Отсюда следует, что $\boxed{O \equiv O_1}$ (эти точки совпадают).

$DC = AO = a$ и $DC \parallel AO$, т.е. $ADCO$ — параллелограмм. Учитывая, что $AD = OC$, получим, что

$\triangle ADO = \triangle ODC = \triangle OCB$ — равносторонние.



Очевидно, что $ASB \perp ABCD$ ($SO \in ASB$; $SO \perp ABCD$; $\triangle ASB$ — равносторонний).

Таким образом, $\left(SA;\widehat{ABCD}\right) = \left(SD;\widehat{ABCD}\right) = \boxed{60^\circ}$.

б) Найдем $\angle S\underline{AD}C$.

Сделаем дополнительное построение — $ON \perp AD$.

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $SN \perp AD$.

Итак, $\left.\begin{array}{l} AD \perp ON \\ AD \perp SN \end{array}\right| \Rightarrow AD \perp (SON)$ (признак перпендикулярности прямой и плоскости).

Таким образом, $\angle S\underline{AD}C = \angle SNO$.

$$SO = AS \cdot \sin 60^\circ; \quad SO = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Из $\triangle AON$ $\quad AN = DN$ $(AO = OD = AD = a)$, так как $ON \perp AD$.

$$ON = AO \cdot \sin 60^\circ; \quad ON = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2};$$

$$\operatorname{tg}(\angle SNO) = \frac{SO}{ON}; \quad \operatorname{tg}(\angle SNO) = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = 2;$$

$$\operatorname{tg}(\angle SNO) = 2 \quad (SO \perp ON);$$

$$\boxed{\angle S\underline{AD}O = \angle S\underline{AD}C = \operatorname{arctg} 2}.$$

в) Найдем $\angle S\underline{DC}B$.

Построим $OL \perp DC \Rightarrow SL \perp DC$ (по теореме о трех перпендикулярах),

значит $\angle S\underline{DC}B = \angle SLO$.

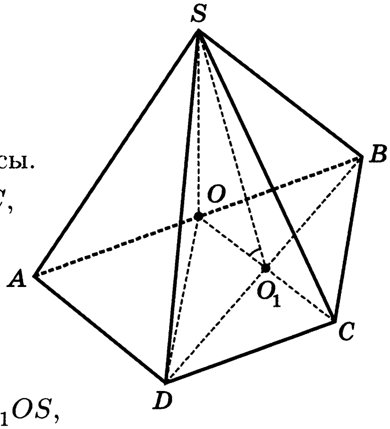
Из $\triangle ODL$: $\quad OL = OD \sin 60^\circ; \quad OL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$(\triangle ADO = \triangle ODC = \triangle OCB$ — равносторонние).

$$\operatorname{tg}(\angle SLO) = \frac{SO}{OL}; \quad \operatorname{tg}(\angle SLO) = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}};$$

$$\boxed{\angle S\underline{DC}O = \operatorname{arctg} 2}.$$

г) Найдем $\angle S\underline{DB}A$.



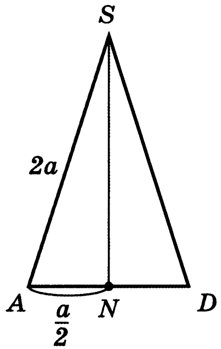
1. Так как $OBCD$ — ромб, то $OC \perp DB$. OC и DB — биссектрисы. Учитывая, что $AD \parallel OC$, получим $AD \perp DB$.
2. $OO_1 \perp DB$, значит по теореме о трех перпендикулярах $SO_1 \perp DB$, тогда $DB \perp O_1OS$, т. е. $\angle S\underline{DB}O = \angle OO_1S = \angle S\underline{DB}A$.
3. $\operatorname{tg}(\angle OO_1D) = \dfrac{OS}{OO_1}$ $\left(OO_1 = \dfrac{1}{2}AD = \dfrac{a}{2},\ OS = a\sqrt{3}\right)$;

   $\operatorname{tg}(\angle OO_1S) = \dfrac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{3}$;

   $\boxed{\angle OO_1S = \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}) = \angle S\underline{DB}A}$.

д) Найдем $S_{\text{п.п.п}}$.

Вычислим сначала площади боковых граней, при этом учтем, что $\triangle ASD = \triangle DSC = \triangle CSB$.



1. $S_{\triangle ASD} = \dfrac{1}{2}SN \cdot AD$;

   $SN = \sqrt{AS^2 - AN^2}$;

   $SN = \sqrt{4a^2 - \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{2}$;

   $S_{\triangle ASD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a\sqrt{15}}{2} \cdot a = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$

   (отметим, что $S_{\triangle ASD} = S_{\triangle DSC} = S_{\triangle SCB}$).

2. $S_{\triangle ASB} = \dfrac{1}{2}AS^2 \cdot \sin 60°$; $\quad S_{\triangle ASB} = \dfrac{1}{2} \cdot 4a^2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = a^2\sqrt{3}$.

3. $S_{ABCD} = \dfrac{AB + DC}{2} \cdot OL$;

$$S_{ABCD} = \frac{2a + a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3};$$

$$S_{\text{п.п.п}} = 3S_{\triangle ASD} + S_{\triangle ASB} + S_{ABCD};$$

$$S_{\text{п.п.п}} = \frac{3a^2\sqrt{15}}{4} + a^2\sqrt{3} + \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} =$$

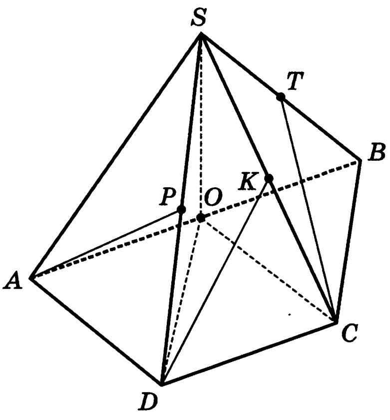
$$= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3}\left(3\sqrt{5} + 4 + 3\right). \quad \boxed{S_{\text{п.п.п}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(3\sqrt{5} + 7\right)}.$$

е) Найдем V_{SABCD}.

$$V_{SABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SO; \quad V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4}a^2\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^3.$$

$$\boxed{V_{SABCD} = \frac{3}{4}a^3}.$$

ж) Найдем $\left(\widehat{AP; DK}\right)$.



Введем базисные векторы.

$\overrightarrow{OS} = \vec{b}$; $\quad |\vec{b}| = a\sqrt{3}$;

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$; $\quad |\vec{a}| = a$;

$\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 90°$; $\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = 0$.

$\overrightarrow{OD} = \vec{c}$; $\quad |\vec{c}| = a$;

$\left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = 60°$; $\quad \cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{c}}\right) = \dfrac{1}{2}$.

$\left(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}\right) = 90°$; $\quad \cos\left(\widehat{\vec{b}; \vec{c}}\right) = 0$.

1. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}.$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DS}; \quad \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OD} = \vec{b} - \vec{c};$$

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}.$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP} = \vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Тогда $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AP}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)^2} =$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}\vec{c}^2 + \vec{a}^2 + \frac{1}{4}\vec{b}^2 - \vec{c}\cdot\vec{a} + \frac{1}{2}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}} - \underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}|\vec{c}|^2 + |\vec{a}|^2 + \frac{1}{4}|\vec{b}|^2 - \frac{1}{2}|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2 + \frac{1}{4}\cdot 3a^2 - \frac{a^2}{2}} = a\sqrt{1{,}5}$$

(так как $\vec{c}\cdot\vec{b} = 0$ и $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$).

$$\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CK} = -\vec{a} + \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c},$$

где $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{OA} = -\vec{a};$

$$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CS} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DS} - \overrightarrow{DC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{DC}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{c} + \vec{a}).$$

Так как $AP = DK$, то $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \left|\overrightarrow{DK}\right| = a\sqrt{1{,}5}$ (медианы равных треугольников).

2. Найдем скалярное произведение:

$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DK}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\frac{1}{4}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}-\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{1}{4}\vec{b}^2-$$

$$-\frac{1}{4}\vec{c}^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{a}^2-\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{a}}+\frac{1}{4}\underline{\vec{c}\cdot\vec{b}}-\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{1}{4}\vec{b}^2-$$

$$-\frac{1}{4}\vec{c}^2+\frac{1}{2}\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}=$$

$$=-\frac{1}{4}|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}|\vec{a}|^2+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2-\frac{1}{4}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\frac{1}{2}=$$

$$\left(\vec{c}\cdot\vec{b}=0;\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0;\quad |\vec{b}|=|\vec{a}|\sqrt{3}\right)$$

$$=-\frac{1}{8}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a^2-\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{4}a^2=\frac{9}{8}a^2;$$

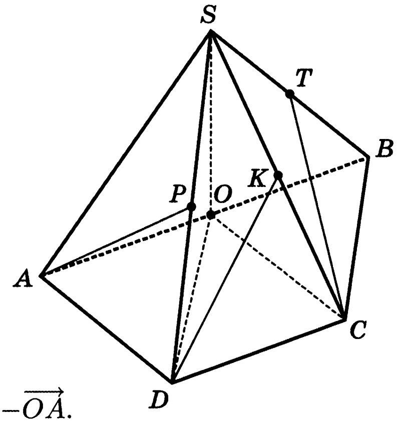
$$\left(\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}a^2\right)$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DK}\right|=\left(a\sqrt{1{,}5}\right)^2=\frac{3}{2}a^2.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DK}}\right)=\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DK}}{\left|\overrightarrow{AP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{DK}\right|}=\frac{\frac{9}{8}a^2}{\frac{3}{2}a^2}=\frac{3}{4},$$

значит так как $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DK}}\right)>0$,

то $\boxed{\left(\widehat{AP;DK}\right)=\arccos\frac{3}{4}}$.



з) Найдем $\left(\widehat{AP;CT}\right)$.

Рассмотрим сначала векторный способ.

1. $\overrightarrow{CT}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BT}$, где:

$\overrightarrow{BT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BS}=$

$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OB}\right)$;

$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DO}=-\vec{c}$; $\quad \overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OA}$.

$\overrightarrow{BT}=\frac{1}{2}\left(\vec{b}-(-\vec{a})\right)=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{a})$, тогда $\overrightarrow{CT}=-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$.

2. Так как $AP=DK=CT$, то $\left|\overrightarrow{CT}\right|=\left|\overrightarrow{DT}\right|=a\sqrt{1{,}5}$.

Значит $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{CT}=\left(\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)\left(-\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}\right)=$

$$=-\frac{1}{2}\vec{c}^2+\vec{a}\cdot\vec{c}-\frac{1}{2}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}+\frac{1}{4}\underline{\vec{b}\cdot\vec{c}}-\frac{1}{2}\underline{\vec{a}\cdot\vec{b}}+\frac{1}{4}\vec{b}^2+$$

$$+\frac{1}{4}\vec{c}\cdot\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}^2+\frac{1}{4}\vec{b}\cdot\vec{a}=$$

$$=-\frac{1}{2}|\vec{c}|^2+\frac{1}{2}|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|+\frac{1}{4}|\vec{b}|^2+\frac{1}{4}|\vec{c}|\cdot|\vec{a}|\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}|\vec{a}|^2=$$

$\left(\vec{b}\cdot\vec{c}=0;\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0\right)$

$$=-\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a^2+\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{8}a^2-\frac{1}{2}a^2=\frac{3}{8}a^2;$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{CT}}\right)=\frac{\frac{3}{8}a^2}{\frac{3}{2}a^2}=\frac{1}{4};$$

$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{CT}}\right)>0$, значит $\cos\left(\widehat{AP;CT}\right)=\frac{1}{4}$,

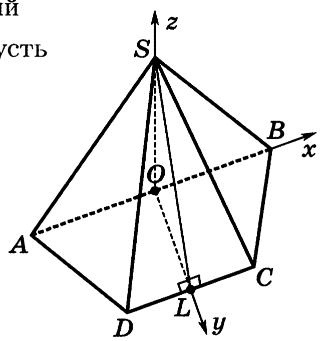
или $\boxed{\left(\widehat{AP;CT}\right)=\arccos\frac{1}{4}}$.

Рассмотрим теперь координатный метод решения задач ж) и з). Пусть

OS — ось Oz (аппликат);

OB — ось Ox (абсцисс);

OL — ось Oy (ординат).

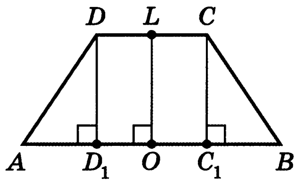


Используем результаты анализа трапеции $ABCD$.

Учтем, что $OS = a\sqrt{3}$;

$DD_1 = CC_1 = OL = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$;

$OD_1 = OC_1 = \dfrac{a}{2}$. Тогда



$S\ \left(0; 0; a\sqrt{3}\right)$, $A\ (-a; 0; 0)$,

$B\ (a; 0; 0)$, $D\ \left(-\dfrac{a}{2}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Напомним, что для произвольных точек $A\ (x_1; y_1; z_1)$ и $B\ (x_2; y_2; z_2)$ если M — середина AB, то $M\ \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}; \dfrac{y_1 + y_2}{2}; \dfrac{z_1 + z_2}{2}\right)$.

Тогда

$P\ \left(-\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ (середина DS);

$K\ \left(\dfrac{a}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{4}; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ (середина SC);

$T\ \left(\dfrac{a}{2}; 0; \dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ (середина SB).

Затем найдем координаты векторов.

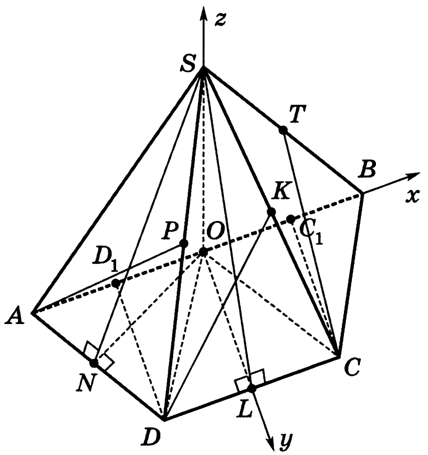
Напомним, что если $A\ (x_1; y_1; z_2)$, $B\ (x_2; y_2; z_2)$ — координаты точек, определяющих начало и конец вектора, то $\overrightarrow{AB}\ \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$.

Напомним также, что если $\vec{a}\,\{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b}\,\{x_2; y_2; z_2\}$,

то $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$; $|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$;

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$;

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}; \vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$



Решим задачу з) координатным методом. $\left(\widehat{AP; CT}\right) = ?$

$$\overrightarrow{AP} = \left\{-\frac{a}{4} - (-a); \frac{a\sqrt{3}}{4} - 0; \frac{a\sqrt{3}}{2} - 0\right\};$$

$$\overrightarrow{AP} = \left\{\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$\overrightarrow{DK} = \left\{\frac{a}{4} - \left(-\frac{a}{2}\right); \frac{a\sqrt{3}}{4} - \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2} - 0\right\};$$

$$\overrightarrow{DK} = \left\{\frac{3a}{4}; -\frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{16}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{24}}{4}a = a\sqrt{1{,}5}.$$

$$\left|\overrightarrow{DK}\right| = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{3}{16}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{1{,}5}.$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{DK} = \frac{3}{4}a \cdot \frac{3}{4}a + \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-\frac{a\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \frac{9}{16}a^2 - \frac{3}{16}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{9}{8}a^2;$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{DK}\right| = a\sqrt{1{,}5} \cdot a\sqrt{1{,}5} = \frac{3}{2}a^2.$$

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{DK}}\right) = \frac{\frac{9}{8}a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{3}{4}, \text{ т. е. } \cos\left(\widehat{AP; DK}\right) = \frac{3}{4}.$$

Теперь решим координатным методом задачу з).

$$\overrightarrow{CT} = \left\{0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right\}; \qquad \overrightarrow{AP} = \left\{\frac{3a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$\left|\overrightarrow{CT}\right| = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{4}a^2} = a\sqrt{1{,}5};$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CT} = \frac{3}{4}a \cdot 0 + \frac{a\sqrt{3}}{4} \cdot \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\frac{3}{8}a^2 + \frac{3}{4}a^2 = \frac{3}{8}a^2;$$

$$\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CT}\right| = a\sqrt{1{,}5} \cdot a\sqrt{1{,}5} = \frac{3}{2}a^2; \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP}; \overrightarrow{CT}}\right) = \frac{\frac{3}{8}a^2}{\frac{3}{2}a^2} = \frac{1}{4},$$

$$\text{т. е. } \cos\left(\widehat{AP; CT}\right) = \frac{1}{4}, \text{ значит } \boxed{\left(\widehat{AP; CT}\right) = \arccos\frac{1}{4}}.$$

Примечание. Возможно и другое решение. Рассмотрите рисунок на этой странице.

Пусть M — середина AS (T — середина BS по условию), тогда $MT \parallel AB$ и $MT = AO = DC$.

Из $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{CT}$ ($DMCT$ — параллелограмм) следует, что $\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{CT}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DM}}\right)$. Пусть $AP \cap DM = O_1$, тогда

$AO_1 = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3}a\sqrt{1{,}5}$ (AP и DM — медианы);

$DO_1 = \frac{2}{3}DM = \frac{2}{3}a\sqrt{1{,}5}.$

Из $\triangle AO_1D$ $\cos(\angle AO_1D) = \dfrac{AO_1^2 + DO_1^2 - AD^2}{2 \cdot AO_1 \cdot DO_1}$,

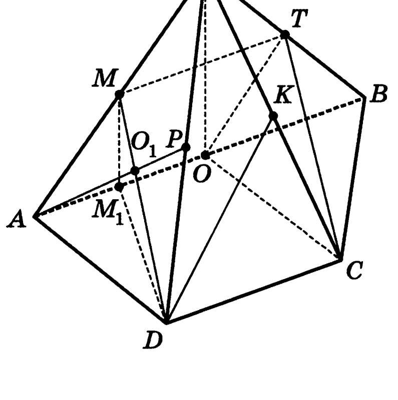
т. е. $\cos(\angle AO_1D) = \dfrac{\frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{3}{2} + \frac{4}{9}a^2 \cdot \frac{3}{2} - a^2}{2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2}a^2} = \dfrac{1}{4}.$

$\cos(\angle AO_1D) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AP};\overrightarrow{DM}}\right) = \cos\left(\widehat{AP;CT}\right) = \dfrac{1}{4};$

$\boxed{\left(\widehat{AP;CT}\right) = \arccos\dfrac{1}{4}}.$

Такой способ, очевидно, проще рассмотренных ранее.

и) Найдем $\rho(AP;CT)$.



Известен способ решения таких задач через векторы. Рассмотрим несколько иные подходы к их решению.

1. Можно доказать, что $AP \leftthreetimes CT$, т. е. прямые AP и CT скрещиваются.

2. Тогда существует единственная пара параллельных плоскостей, которым принадлежат эти скрещивающиеся прямые.

3. Известно также, что расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями, однозначно определяемыми этими прямыми.

   Из анализа $\triangle SAD$ и $\triangle TOC$ следует, что:

   $$\left.\begin{array}{l} OT \parallel AS \\ OC \parallel AD \end{array}\right| \Rightarrow SAD \parallel TOC, \text{ где } \begin{array}{l} AP \subset SAD \\ CT \subset TOC \end{array}$$

   ($MT = AO = DC$ — см. примечание).

4. $AM = MS$, тогда $\begin{array}{c} MT \parallel AO \\ DM \parallel CT \end{array}$, следовательно,

   $AMD \parallel OTC$, значит $AMDOTC$ — призма.

5. Найдем объем этой призмы как произведение площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

   Построим $MM_1 \parallel SO$, тогда $AM_1 = M_1O$ и $MM_1 \perp AB$.

   Тогда можно доказать, что $DM_1 \perp AO$.

   В результате $DMM_1 \perp AO$.

   Так как $MM_1 \parallel SO$ и $SO \perp ABCD$, то $MM_1 \perp DM_1$, значит

   $$S_{\triangle DMM_1} = \frac{1}{2} DM_1 \cdot MM_1;$$

   $$S_{\triangle DMM_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}a^2.$$

   Так как $AO = a$, то $V_{\text{пр}} = \frac{3}{8}a^2 \cdot a = \frac{3}{8}a^3$.

С другой стороны, объем призмы равен произведению площади основания на высоту призмы,

т. е. $S_{\triangle AMD} \cdot H = V$, где H — высота призмы и одновременно расстояние между параллельными плоскостями.

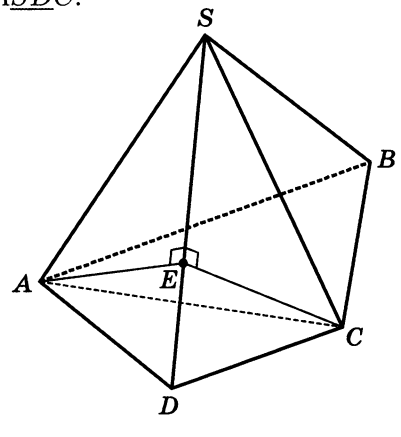
Так как $S_{\triangle ASD} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4}$ (см. решение пункта д, с. 378),

то $S_{\triangle AMD} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a^2\sqrt{15}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{8}$,

значит $\left.\begin{array}{l} V_{\text{пр}} = \dfrac{a^2\sqrt{15}}{8} \cdot H \\ V_{\text{пр}} = \dfrac{3}{8}a^3 \end{array}\right|$, тогда $H = \dfrac{\frac{3}{8}a^3}{\frac{a^2\sqrt{15}}{8}} = \dfrac{a\sqrt{15}}{5}$,

т. е. $\rho(AP; CT) = \boxed{\dfrac{a\sqrt{15}}{5}}$.

к) Найдем $\angle A\underline{SD}C$.



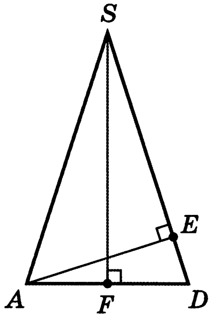
1. Проведем дополнительное построение.

   Пусть $AE \perp SD$.

   Так как $\triangle ASD = \triangle DSC$, то $CE \perp SD$.

2. $\left.\begin{array}{l} AE \perp SD \\ CE \perp SD \end{array}\right|$, следовательно, $SD \perp AEC$,

   значит $\angle A\underline{SD}C = \angle AEC$.



3. $AE = CE = AD\sin(\angle SDC)$ $(\triangle ASD = \triangle DSC)$.

Построим $SF \perp AD$,

тогда $AF = FD = \frac{1}{2}AD = \frac{a}{2}$;

$SF = \sqrt{SD^2 - FD^2}$;

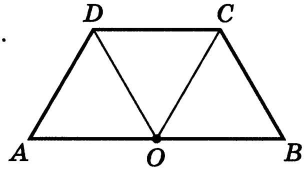
$SF = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$.

Из $\triangle ASD = \triangle DSC \quad (AS = SD = SC)$:

$$\sin(\angle SDF) = \sin(\angle SDC) = \frac{SF}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{15}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{15}}{4}.$$

Из $\triangle AED \quad AE = AD\sin(\angle SDF)$.

4. Значит $AE = \frac{a\sqrt{15}}{4} = CE$.



5. Рассмотрим трапецию $ABCD$. Из пункта а) (стр. 376) следует, что $OBCD$ и $AOCD$ — ромбы, значит $AC \perp OD$ и $OD \parallel BC$, тогда $AC \perp BC$.

$AC = AB \cdot \sin 60°$; $\quad AC = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

6. Рассмотрим $\triangle AEC$. $\cos(\angle AEC) = \frac{2 \cdot AE^2 - AC^2}{2AE^2}$;

$$\cos(\angle AEC) = \frac{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 - \left(a\sqrt{3}\right)^2}{2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2} =$$

$$= 1 - \frac{3a^2 \cdot 16}{2 \cdot 15a^2} = 1 - \frac{8}{5} = -0{,}6.$$

$\angle A\underline{SD}C = \angle AEC = \arccos(-0{,}6) = \pi - \arccos 0{,}6$.

Заметим, что $\angle AEC > 90°$. $\boxed{\angle A\underline{SD}C = \pi - \arccos 0{,}6}$.

Самостоятельная работа 5 (Применение координатно-векторного метода)

Уровень А

1. $\vec{m} \parallel \vec{n}$, где $\vec{m}\,\{2; 3; -4\}$ и $\vec{n}\,\{x; -6; 8\}$. Найдите x.

2. $\vec{m} \perp \vec{n}$, где $\vec{m}\,\{1; x; -2\}$ и $\vec{n}\,\{x; 3; -4\}$. Найдите x.

3. $|\vec{m}| = 2, \quad |\vec{n}| = 5, \quad \left(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}\right) = \dfrac{2\pi}{3};$

   $\vec{a} = x\vec{m} + 17\vec{n}; \quad \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$, причем $\vec{a} \perp \vec{b}$. Найдите x.

4. $\vec{a}\,\{-4; 2; 4\}, \quad \vec{b}\,\left\{\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0\right\}$. Найдите $\left(\widehat{2\vec{a}; \frac{1}{2}\vec{b}}\right)$.

5. $\left(\widehat{\vec{m}; \vec{n}}\right) = \dfrac{2\pi}{3}$, где $|\vec{m}| = 3, \quad |\vec{n}| = 4$.

   Найдите $(3\vec{m} - 2\vec{n}) \cdot (\vec{m} + 2\vec{n})$.

6. Дан вектор $\vec{a} = 6\vec{i} + 8\vec{j} - 7{,}5\vec{k}$, причем: а) $\vec{b} \parallel \vec{a}$; б) $\vec{b}$ образует с осью Oz острый угол; в) $|\vec{b}| = 50$. Найдите координаты вектора $\vec{b}$.

7. Вектор $\vec{m}$ перпедикулярен векторам $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 18\vec{i} - 22\vec{j} - 5\vec{k}$ и образует с осью Oy тупой угол. Найдите координаты вектора $\vec{m}$, если $|\vec{m}| = 14$.

8. Даны векторы $\vec{a}\,\{2; 3; -5\}, \quad \vec{b}\,\{3; 0; 1\}$ и $\vec{c}\,\{4; -3; 2\}$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{m} = 3\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

Уровень B

1. В параллелограмме $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$, $AC = c$. Найдите $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2. В параллограмме $ABCD$ $AB = a$, $AD = b$, $BD = c$. Найдите $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$.

3. Дан треугольник ABC, в котором $CB = a$, $CA = b$, $AB = c$ и $CD = m_{AB}$. Найдите $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD}$.

4. В трапеции $ABCD$ вектор $\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{AD}$.

   а) Докажите, что $\vec{m} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ коллинеарен $\overrightarrow{AD}$ (а значит, и $\overrightarrow{BC}$).

   б) В записи $\vec{m} = y\overrightarrow{AD}$ найдите y.

Уровень C

1. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты с центрами в точках A_1, B_1, C_1 соответственно. Найдите $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$.

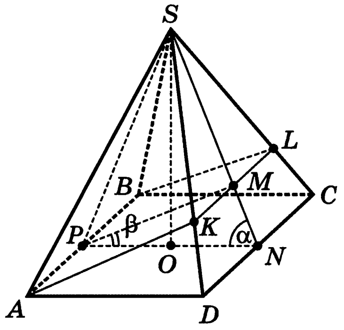
2. В треугольнике ABC через M обозначена точка пересечения медиан. Найдите $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

3. В треугольнике ABC точка M — центр вписанной окружности. Найдите $x\overrightarrow{MA} + y\overrightarrow{MB} + z\overrightarrow{MC}$, если $x = BC$, $y = AC$, $z = AB$.

4. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.
   Найдите $\overrightarrow{OA} \cdot \sin(\angle 2A) + \overrightarrow{OB} \cdot \sin(\angle 2B) + \overrightarrow{OC} \cdot \sin(\angle 2C)$.

Итоговая задача

Двугранный угол при ребре основания правильной четырехугольной призмы равен α. Через это ребро проведено сечение пирамиды, образующее с плоскостью основания угол β. При каком значении угла β площадь сечения будет минимальной?



Дано:

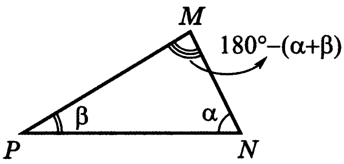
$SABCD$ — прав. пирамида

$\angle S\underline{AB}C = \alpha = S\underline{DC}B$

$\left(ABL\widehat{K; A}BCD\right) = \beta$

При каком β $S_{\text{сеч}} = S_{\text{сеч}\min}$?

Пусть $AD = a$. Построим $SO \perp ABCD$ и $SP \perp AB$; $SPN \perp ABCD$, тогда $O \in PN$. $ABLK$ — сечение пирамиды, образующее угол β с плоскостью $ABCD$. Рассмотрим $\triangle PMN$.

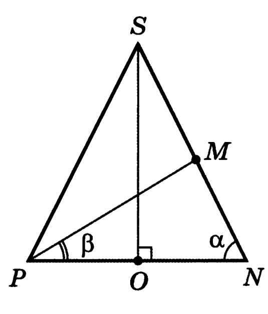


а) По теореме синусов: $\dfrac{PM}{\sin\alpha} = \dfrac{PN}{\sin(180^\circ - (\alpha+\beta))}$,

т. е. $\dfrac{PM}{\sin\alpha} = \dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta.)}$, значит $PM = \dfrac{a\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

б) $\dfrac{MN}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin(\alpha+\beta)}$,

тогда $MN = \dfrac{a\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$.



в) Рассмотрим $\triangle PSN$.

Так как $ON = SN\cdot\cos\alpha$,

то $SN = \dfrac{PN}{2\cos\alpha} = \dfrac{a}{2\cos\alpha}$.

$$SM = SN - MN = \frac{a}{2\cos\alpha} - \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= a \cdot \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha - 2\cos\alpha \cdot \sin\beta}{2\cos\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha \cdot \sin(\alpha+\beta)}.$$

г) $\triangle SKL$ подобен $\triangle SDC$,

тогда $\dfrac{SM}{SN} = \dfrac{KL}{DC}$, т. е. $KL = \dfrac{SM \cdot DC}{SN}$;

$$KL = \frac{a \cdot \sin(\alpha-\beta) \cdot \cancel{a}}{\cancel{2\cos\alpha} \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{2\cos\alpha}}} = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

д) Очевидно, что $S_{ABLK} = \dfrac{AB+KL}{2} \cdot PM$, значит

$$S_{ABLK} = \frac{1}{2} \cdot \left(a + \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right) \cdot \frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{a^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)} = S(\beta).$$

Исследуем функцию $t(\beta) = \dfrac{\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$, где α — постоянная, а β — переменная величина, причем $\sin(\alpha+\beta) > 0$ $(0 < \alpha+\beta < 180°)$.

$$t'(\beta) = \frac{-\sin\beta \cdot \sin^2(\alpha+\beta) - \cos\beta \cdot 2\cos(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\beta)}{\sin^4(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{\sin(\alpha+\beta) \cdot (-\sin\beta\sin(\alpha+\beta)) - 2\cos\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin^4(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{-\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) - 2\cos\beta \cdot \cos(\alpha+\beta)}{\sin^3(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{-\sin\beta \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot (1 + 2\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}(\alpha+\beta))}{\sin^3(\alpha+\beta)} =$$
$$= \frac{-\sin\beta \cdot (1 + \operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}(\alpha+\beta))}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Вид не канонический[6]

$t'(\beta) = 0; \quad \sin\beta \cdot (1 + 2\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}(\alpha+\beta)) = 0;$

$\sin\beta \neq 0$ (по геометрическому смыслу), значит

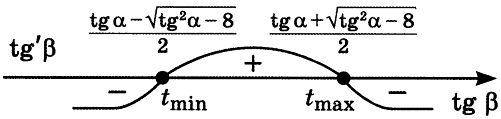
$1 + 2\operatorname{ctg}\beta \cdot \operatorname{ctg}(\alpha+\beta) = 0; \quad \operatorname{tg}\beta \cdot \operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -2.$

Преобразуя, получим:

$$\operatorname{tg}\beta \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = -2; \quad \operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = -2 + 2\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta,$$

т. е. $\operatorname{tg}^2\beta - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta + 2 = 0; \quad D = \operatorname{tg}^2\alpha - 8 \geqslant 0;$

$$(\operatorname{tg}\beta)_{1,2} = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 8}}{2}.$$



Значение $t(\beta)$ минимально при $\boxed{\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - 8}}{2}}$, что возможно только при $\operatorname{tg}\alpha > 2\sqrt{2}$ — условие существования различных корней производной.

Если $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, то $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$ и $\beta = \operatorname{arctg}\sqrt{2}$, значит, подставляя, получим $S_{ABLK} = \frac{4\sqrt{3}}{9}a^2$ и $S_{\triangle ABS} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Если $\operatorname{tg}\alpha < 2\sqrt{2}$, то функция $t(\beta)$ монотонно убывает. Значит $t_{\min}$ не существует, но есть наименьшее значение $S_{\text{наим}} = S_{\triangle ASB} = \frac{a^2}{4\cos\alpha}$, где $\cos\alpha > \frac{1}{3}$ $\left(S_{ABLK} = S_{\triangle ASB}\right)$.

Более подробно см. книгу А. Х. Шахмейстер «Введение в математический анализ». 2010 г., с. 276–314.

[6] См. книгу А. Х. Шахмейстер «Дробно-рациональные неравенства». 2012 г., с. 20.

3

Повторение

Домашняя тренировочная работа 1 (Планиметрия)

1. Высота, опущенная из вершины прямого угла, равна 15, а медиана 17. Найдите площадь этого треугольника и произведение радиусов вписанного и описанного круга.

2. Диагонали параллелограмма равны соответственно 5 и 3, а острый угол параллелограмма равен $60°$. Найдите:

а) площадь параллелограмма;

б) угол между диагоналями параллелограмма;

в) угол между медианами, проведенными из одной вершины.

3. В параллелограмме стороны равны соответственно a и b, острый угол параллелограмма равен α. Из каждой вершины проведена биссектриса. Найдите площадь четырехугольника, получившегося при пересечении биссектрис.

4. Стороны треугольника относятся как $15 : 14 : 13$. Радиус вписанной окружности равен 32. Найдите радиус описанной окружности.

5. Разность двух сторон треугольника, угол между которыми равен $60°$, равен 10. Медиана, проведенная к третьей стороне, равна 25. Найдите площадь треугольника.

6. Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны. Стороны оснований равны 13 и 17. Найдите площадь трапеции и радиус описанной окружности.

7. В тупоугольном треугольнике бо́льшая сторона равна 18, меньшая 6. Найдите величину тупого угла, если площадь треугольника равна 51.

8. Дана трапеция, две смежные стороны которой равны 8, а большее основание равно 15. Боковая сторона равна m. Найдите:

а) все значения, которые может принимать m;

б) все значения, которые может принимать диагональ, исходящая из общей вершины равных сторон;

в) значения, которые может принимать m, если трапеция прямоугольная;

г) значение m, если угол между стороной, равной m, и большим основанием равен $60°$.

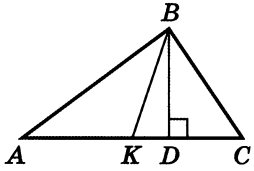
9. Около трапеции с основаниями, равными 20 и 80, описана окружность. Найдите радиус вписанной в трапецию окружности и площадь треугольника, ограниченного средней линией и диагоналями трапеции.

10. Около окружности описана трапеция с основаниями, равными 4 и 16. Найдите радиус описанной около трапеции окружности и площадь трапеции, основаниями которой являются параллельные основанию отрезки, один из которых проходит через точку пересечения диагоналей, а другой делит трапецию на две подобные трапеции.

Домашняя тренировочная работа 1 (Планиметрия). Чертеж. План решения

1. Дано:

$\triangle ABC$
$AB \perp BC$
$BD \perp AC$, $BD = 15$
$AK = CK$, $BK = 17$



Найдите: а) $S_{\triangle ABC}$; б) $R_{\text{о}} \cdot r_{\text{в}}$.

План решения

а) 1. Найдите DK.

2. $AK = BK = CK = R_{\text{о}}$;

3. Так как $\left.\begin{array}{l} AB^2 = AC \cdot AD \\ BC^2 = AC \cdot CD \end{array}\right|$, то $\begin{array}{l} AB = ? \\ BC = ? \end{array}$

4. $S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2} \cdot AC \cdot BD.$

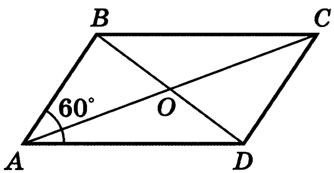
б) Найдем $R_o \cdot r_{\text{в}}$.

Зная, что $r_{\text{в}} = \dfrac{S}{p}$ и $R_{\text{о}} = \dfrac{abc}{4S}$, получим: $R_{\text{о}} \cdot r_{\text{в}} = \dfrac{abc}{4p}$.

$\boxed{255;\ 68\sqrt{34} - 289}$.

2. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм
$BD = 3$
$AC = 5$
$\angle BAD = 60°$



Найдите:

а) S_{ABCD};

б) $\cos\left(\widehat{AC; BD}\right)$;

в) $\cos\left(\widehat{m_{AD}; m_{DC}}\right)$ (B — общая вершина медиан);

г) $\cos\left(\widehat{m_{BC}; m_{DC}}\right)$ (A — общая вершина медиан).

План решения

а) $\begin{cases} AB^2 + \underline{BC^2} - 2 \cdot AB \cdot \underline{BC} \cdot \cos 120^\circ = 5^2 \\ AB^2 + \underline{AD^2} - 2 \cdot AB \cdot \underline{AD} \cdot \cos 60^\circ = 3^2 \end{cases}$.

Найдите $AB \cdot BC$, а затем S_{ABCD}. $\boxed{4\sqrt{3}}$.

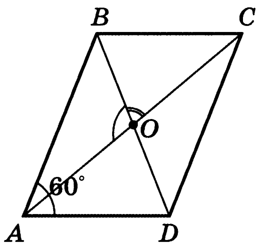
б) Найдите из системы AB и BC.

Положим для определенности, что $AB > BC$.

Тогда $AB = \dfrac{\sqrt{33}+1}{2}$; $BC = \dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$.

Из $\triangle AOB$: $\cos(\angle AOB) = \dfrac{OB^2 + OA^2 - AB^2}{2 \cdot OB \cdot OA} < 0$.

Оказывается, рисунок выглядит иначе.



$\boxed{-\dfrac{\sqrt{33}}{15}}$

в) $\left(\widehat{m_{AD}; m_{DC}}\right) = \left(\widehat{BP; BK}\right)$,

где $m_{AD} = BP$ $(\triangle ABD)$, а $m_{DC} = BK$ $(\triangle CBD)$.

Из пункта б) следует, что

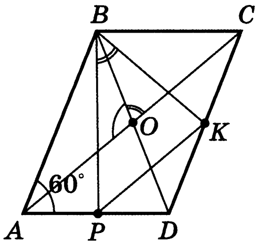
$BC = AD = \dfrac{\sqrt{33}-1}{2}$, $AB = DC = \dfrac{\sqrt{33}+1}{2}$.

Затем найдите BP (из $\triangle ABP$), BK (из $\triangle CBK$):

$BP = \dfrac{1}{4}\sqrt{106 + 6\sqrt{33}}$;

$BK = \dfrac{1}{4}\sqrt{106 - 6\sqrt{33}}$;

$PK = \dfrac{1}{2}AC$.

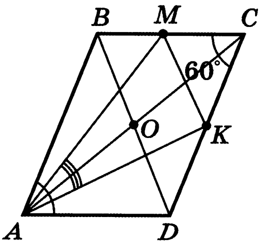


Далее из $\triangle PBK$ получите:

$\cos\left(\widehat{m_{AD}; m_{DC}}\right) = \dfrac{BP^2 + BK^2 - PK^2}{2 \cdot BP \cdot BK}$,

т. е. $\cos\left(\widehat{m_{AD}; m_{DC}}\right) = \dfrac{56}{\sqrt{10\,048}} = \dfrac{14}{\sqrt{638}} = \boxed{\dfrac{7\sqrt{638}}{319}}$.

г) $\left(m_{\widehat{BC}}; m_{DC}\right) = \left(\widehat{AM; AK}\right)$



Найдите

$AM = \frac{1}{4}\sqrt{234+6\sqrt{33}}$ из $\triangle ABM$

и $AK = \frac{1}{4}\sqrt{234-6\sqrt{33}}$ из $\triangle AKD$,

$MK = \frac{1}{2}BD.$

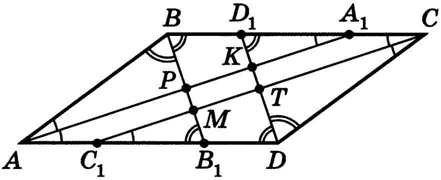
Затем вычислите $\cos(\angle MAK)$. $\boxed{\dfrac{214}{\sqrt{54\,566}}}$

Самостоятельно решите задачу при $AB < AC$.

3. Дано:

$ABCD$ — параллелограмм
AA_1, CC_1, BB_1, DD_1 — биссектрисы
$AA_1 \cap BB_1 = P$; $AB = a$ ($b > a$, для определенности)
$AA_1 \cap DD_1 = K$; $BC = b$
$CC_1 \cap BB_1 = M$
$CC_1 \cap DD_1 = T$; $\angle BAD = \alpha$

Найдите S_{PKTM}.



План решения

а) Докажите $AB = BA_1$, $DC = DC_1$.

б) Докажите $AP \perp BP$ (тогда $PKTM$ прямоугольник).

в) Найдите D_1A_1 — $(2a - b)$.

г) Найдите AA_1 — $\left(2a\cos\frac{\alpha}{2}\right)$.

д) Найдите DD_1 — $\left(2a\sin\frac{\alpha}{2}\right)$.

е) Найдите KA_1, PK, D_1K, KT, где

$$PK = A_1P - KA_1 \ \left(A_1P = \frac{1}{2}AA_1\right);$$

$$KT = D_1T - KD_1 \ \left(D_1T = \frac{1}{2}DD_1\right).$$

ж) Найдите $S_{PKTM} = KT \cdot PK$. $\boxed{\frac{1}{2}(b-a)^2 \sin\alpha}$

Примечание. Если $ABCD$ ромб, то $S_{PKTM} = 0$;

Если $ABCD$ прямоугольник, то $S_{PKTM} = \frac{1}{2}(b-a)^2$ — квадрат.

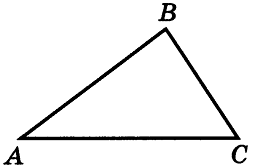
4. Дано:

$\triangle ABC$

$AB : BC : AC = 14 : 13 : 15$

$r_{\text{в}\triangle ABC} = 32$

Найдите $R_{\text{о}}$.



План решения

а) Из условий задачи следует, что $AB = 14x$, $BC = 13x$, $AC = 15x$.

б) Вычислите $S_{\triangle ABC}$ (по теореме Герона).

в) Вычислите полупериметр.

Используя формулу $r_{\text{в}} = \frac{S}{p}$, найдите значение x.

г) Используя формулу $R_{\text{о}} = \frac{abc}{4S}$, найдите $R_{\text{о}}$. $R_{\text{о}} = \boxed{65}$

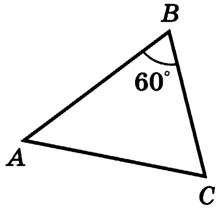
5. Дано:

$\triangle ABC$

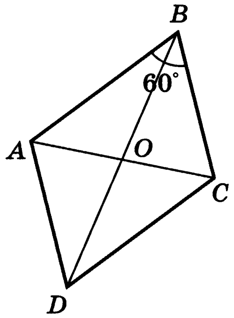
$AB - BC = 10$; $m_{AC} = 25$

$\angle ABC = 60°$

Найдите $S_{\triangle ABC}$.



План решения



а) Достроим $\triangle ABC$ до параллелограмма $ABCD$, где $BO = m_{AC} = 25$ $(AO = OC,\ BO = OD)$

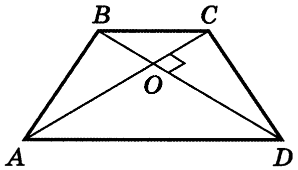
б) Из $\triangle ABD$, используя теорему косинусов, получите $50^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120°$. Учтя, что $AB - BC = 10$, найдите $AB \cdot BC$ $(AD = BC)$.

в) Зная, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 60°$, вычислите $S_{\triangle ABC}$.

$\boxed{200\sqrt{3}}$

6. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AB = DC$
$AC \perp BD$
$AD = 17$, $BC = 13$



Найдите: а) S_{ABCD}; б) $R_{\circ ABCD}$.

План решения

а) 1. Сначала докажите, что так как $AB = DC$, то $AC = BD$.

2. Затем покажите, что так как $AC \perp BD$, то $\triangle BOC$ и $\triangle DOA$ — прямоугольные. Докажите, что $BO = OC$, $AO = DO$. Следовательно, $\angle OAD = 45°$ и $\angle OBC = 45°$.

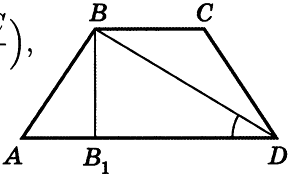
3. Вычислите $H_{\triangle AOD}$, $H_{\triangle BOC}$, H_{ABCD},

$S_{ABCD} = \boxed{56{,}25\sqrt{2}}$.

б) 1. Так как $R_{\text{о}\triangle ABD} = R_{\text{о}ABCD}$, то вычислите $R_{\text{о}ABD}$ по формуле $R_{\text{о}} = \dfrac{AB}{2\sin(\angle BDA)}$.

2. Для этого найдите AB_1, B_1D, BD $\left(BB_1 \perp AD,\ AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}\right)$, $\sin(\angle BDA)$.

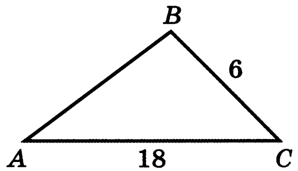
$R_{\text{о}ABCD} = \boxed{0{,}5\sqrt{699}}$



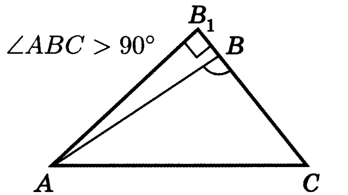
7. Дано:

$\triangle ABC$, $\angle ABC > 90°$
$AC > AB > BC$
$AC = 18$
$BC = 6$
$S_{\triangle ABC} = 51$

Найдите $\angle ABC$.



План решения

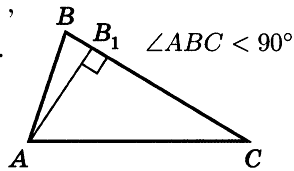


а) Используя формулу $S = \dfrac{1}{2}ab\sin\left(\widehat{a;b}\right)$, найдите $\sin(\angle ACB) = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AC \cdot BC}$.

б) Найдите $\cos(\angle ACB) = \sqrt{1 - \sin^2(\angle ACB)}$.

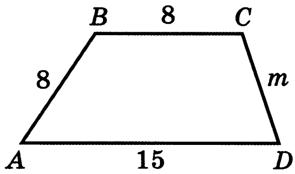
в) Найдите $B_1C = AC\cos(\angle ACB)$, получите $B_1C = \sqrt{35} < BC = 6$.

Вывод: такого треугольника, где $\angle ABC > 90°$, не существует.



8. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$AD = 15$; $AB = 8$; $BC = 8$
$DC = m$



Найдите:

а) область изменения значений m;

б) область изменения значений диагонали BD;

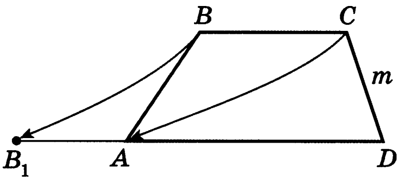
в) значения m, если трапеция прямоугольная;

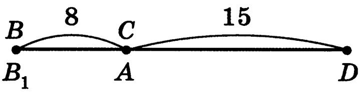
г) значение m, если $\angle ADC = 60°$.

План решения

а) Так как возможны вырожденные случаи, то рассмотрим, прежде всего, именно их.

1. Пусть $B \to B_1$, значит $C \to A$.

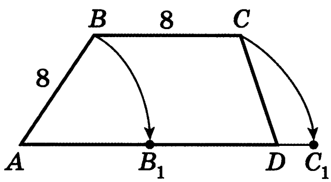


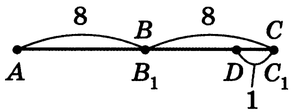


Трапеция выродится в отрезок B_1D.

Значит $m = 15$, тогда в общем случае $m < 15$.

2. Пусть $B \to B_1$, тогда $C \to C_1$.





Трапеция выродится в отрезок AC_1.

Так как $AC_1 = 16$, то $m = DC_1 = AC_1 - AD$,

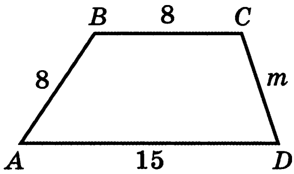
т. е. $m = 1$.

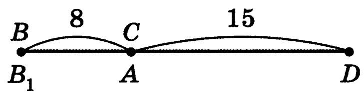
Значит в общем случае $m > 1$.

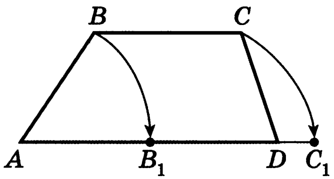
Итак, $1 < m < 15$ есть область изменения $m \in (1; 15)$.

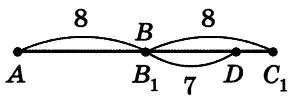
б) Из картинок вырожденных случаев следует,

что $\begin{matrix} BD < 23 \\ BD > 7 \end{matrix}$.









Значит диагональ $\boxed{7 < BD < 23}$ — для невырожденных трапеций.

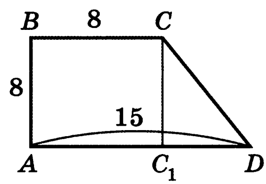
в) Рассмотрим прямоугольные трапеции.

1. Дано: $AB \perp AD$.

   $DC_1 = 7$, тогда

   $m = DC = \sqrt{8^2 + 7^2} = \sqrt{113}$,

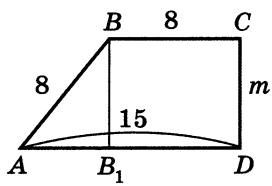
   т. е. $\boxed{m = \sqrt{113}}$.



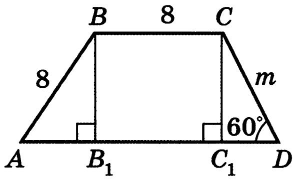
2. Дано: $DC \perp AB$.

   $m = BB_1 = \sqrt{8^2 - 7^2} = \sqrt{15}$,

   т. е. $\boxed{m = \sqrt{15}}$.



3. $DC_1 = m\cos 60^\circ = \dfrac{m}{2}.$



$AB_1 = 15 - 8 - \dfrac{m}{2} = 7 - \dfrac{m}{2};$

$BB_1 = \sqrt{AB^2 - AB_1^2}$ и $CC_1 = m\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}m.$

Тогда так как $BB_1 = CC_1$, то

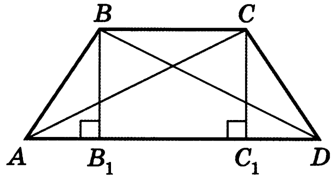
$\dfrac{3}{4}m^2 = 8^2 - \left(7 - \dfrac{m}{2}\right)^2;\quad \dfrac{3}{4}m^2 = 8^2 - 49 + 7m - \dfrac{m^2}{4};$

$m^2 + 7m - 15 = 0;\quad m_{1,2} = \dfrac{-7 \pm \sqrt{107}}{2}.$

Так как $m > 0$, то $\boxed{m = \dfrac{\sqrt{107} - 7}{2}}$.

9. Дано:

$ABCD$ — трапеция
$BC = 20$
$AD = 80$
$\exists R_{\text{о}ABCD}$; $\exists r_{\text{в}ABCD}$



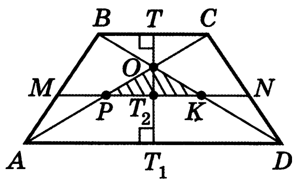
Найдите:

а) $r_{\text{в}ABCD}$;

б) $S_{\triangle OPK}$, где $MN \parallel AD$;
$O \in AC \cap BD$; $PK \in MN$
$P = MN \cap AC$; $K = MN \cap BD$.

План решения

а) 1. Докажите, что $AB = DC$ и найдите их значение.



2. Докажите, что
$$AB_1 = \frac{AD - BC}{2}$$
и найдите значение AB_1.

3. Найдите из $\triangle ABB_1$: BB_1, $r_{\text{в}} = \dfrac{1}{2}BB_1$; $\boxed{r_{\text{в}} = 20}$.

б) 1. Докажите, что $\dfrac{OT_1}{OT} = \dfrac{AD}{BC}$.

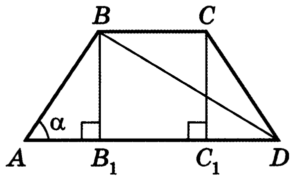
2. Найдите OT_1, OT, учитывая, что $OT_1 + OT = 40$ ($TT_1 = 2$).

3. Найдите MN $\left(MN = \dfrac{AD+BC}{2}\right)$, MP, KN, PK, OT_2.

4. Вычислите $S_{\triangle OPK}$. $\boxed{225}$

10. Дано:

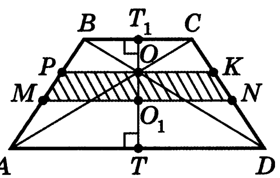
$ABCD$ — трапеция
$BC = 4$
$AD = 16$
$\exists R_{\text{о}ABCD}$
$\exists r_{\text{в}ABCD}$



Найдите:

а) $R_{\text{о}ABCD}$;

б) S_{MPKN}, где $PK \parallel MN \parallel AD$; $O \in PK$; $AMND$ подобна $MBCN$.



План решения

а) 1. Докажите, что $AB = DC$ и $AB_1 = \dfrac{AD - BC}{2}$.

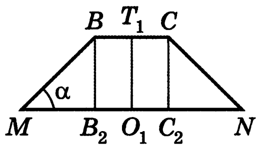
2. Найдите: AB, AB_1, BD и $\sin\alpha$ (из $\triangle ABB_1$).

3. Из $\triangle ABD$ найдите $R_{\text{о}ABD}$.

4. Докажите, что $R_{\text{о}ABD} = R_{ABCD}$. $\boxed{1{,}25\sqrt{41}}$

б) 1. Найдите PK, MN (используйте то, что $PK = \dfrac{2ab}{a+b}$, а $MN = \sqrt{ab}$, см. книгу: А. Х. Шахмейстер. Геометрические задачи на экзаменах, 2011.)

2. Найдите OT_1, T_1O_1, O_1T, используя то, что
$\frac{T_1O}{OT} = \frac{BC}{AD}$;
$MB_2 = NC_2 = \frac{MN - BC}{2}$.



3. Затем вычислите $BB_2 = T_1O_1$. Используйте то, что известен $\sin\alpha$, и можно найти $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.
$T_1O_1 = BB_2 = MB_2 \operatorname{tg}\alpha$.

4. Вычислите $OO_1 = T_1O_1 - T_1O$,
затем $S_{MPKN} = \frac{PK + MN}{2} \cdot O_1O$. $\boxed{7{,}68}$

Домашняя тренировочная работа 2 (Многогранники)

1. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 и 8. Найдите высоту параллелепипеда, если диагональ его образует с плоскостью основания углы в 30° и 45°.

2. Ребро куба равно 12. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания параллельно диагоналям куба (три случая).

3. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30°. Найти угол ее наклона к плоскости основания.

4. Стороны основания правильной усеченной треугольной пирамиды равны 8 и 12. Найдите площадь среднего сечения пирамиды (т. е. сечения, проходящего через средние линии боковых граней).

5. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 23, измерения параллелепипеда относятся, как $3:6:22$. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

6. В наклонной треугольной призме две боковые грани взаимно перпендикулярны, а их общее ребро равно 24 и отстоит от двух других боковых ребер на 12 и 35. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

7. Диагонали прямого параллелепипеда равны 92 и 88, а стороны основания 15 и 16. Найдите объем параллелепипеда.

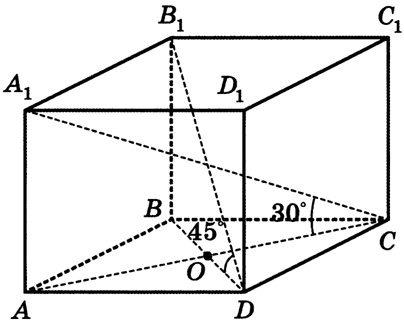
8. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами, равными 15, 17, 16. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом в 45°. Найдите объем пирамиды.

9. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований равны 5 и 13, а боковое ребро равно 6. Найдите объем пирамиды.

10. Плоскость, проходящая через сторону основания правильной треугольной призмы и середину противолежащего бокового ребра, наклонена к плоскости основания под углом в 45°. Сторона основания равна 8. Найдите объем призмы.

Домашняя тренировочная работа 2 (Многогранники). Чертеж. План решения

1. Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед
$BB_1 \perp ABCD$
$\left(A_1C; \widehat{ABCD}\right) = 30°$
$\left(B_1D; \widehat{ABCD}\right) = 45°$
$AB = 6$
$BC = 8$



Найдите $H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

План решения

а) Положите $BB_1 = x$ и найдите BD и AC.

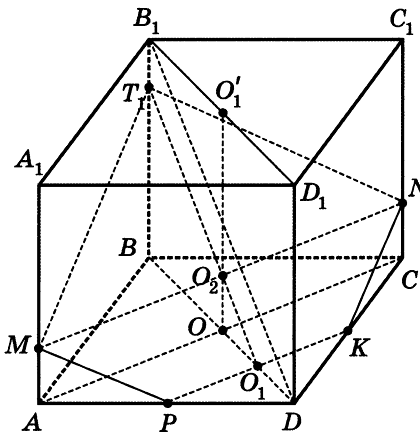
б) Так как $2\left(AB^2 + BC^2\right) = AC^2 + BD^2$ (свойство параллелограмма), то можно найти x.

Следовательно,

$H_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = \boxed{5\sqrt{2}}$.

2. Случай А

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$AB = 12$
P, K — середины смежных сторон AD, DC
$O_1T_1 \parallel DB_1$
$(PK \cap BD = O_1)$



Найдите $S_{\text{сеч}}$.

План решения

а) По условию $O_1T_1 \parallel DB_1$. Докажите, что $\triangle T_1BO_1$ подобен $\triangle B_1BD$. Найдите T_1O_1, BT_1.

б) По условию $AB = 12$.

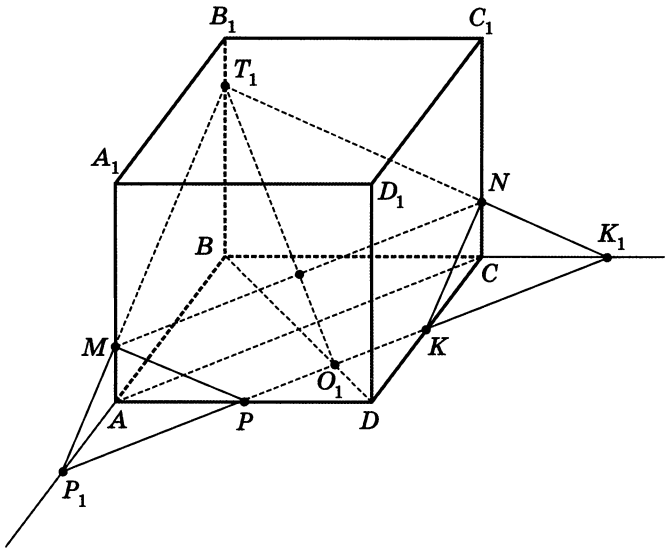
Найдите диагональ куба DB_1, MN, PK.

в) Докажите, что $\triangle T_1BO_1$ подобен $\triangle B_1BD$ и $\triangle O_2OO_1$. Найдите O_1O_2, T_1O_2.

г) Найдите $S_{\triangle MT_1N}$, S_{MPKN}, а затем S_{PMT_1NK}.

$\boxed{63\sqrt{6}}$.

Примечание. Можно иначе.



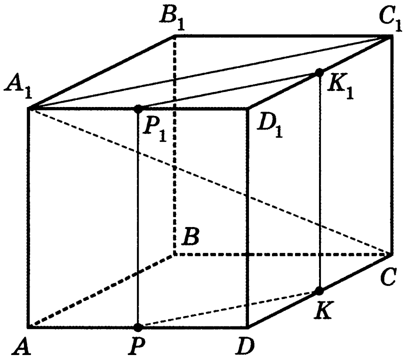
а) $\triangle P_1T_1K_1$ подобен $\triangle P_1MP$ и найдите $S_{\triangle P_1T_1K_1}$, $S_{\triangle P_1MP}$ $\left(\text{докажите, что } \dfrac{S_{\triangle P_1MP}}{S_{\triangle P_1T_1K_1}} = \left(\dfrac{P_1P}{P_1K_1}\right)^2\right)$.

б) $S_{PMT_1NK} = S_{\triangle P_1T_1K_1} - 2S_{\triangle P_1MP}$.

Случай B. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$AB = 12$
P, K — середины смежных сторон AD, DC
$A_1C \parallel PP_1K_1K$

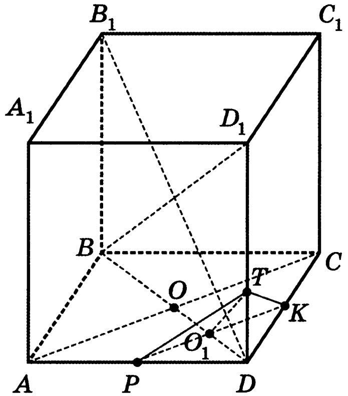
Найдите $S_{\text{сеч}}$. $\boxed{72\sqrt{2}}$



Случай C. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$AB = 12$
P, K — середины смежных сторон AD, DC
$BD_1 \parallel PTK$
$(PK \cap BD = O_1)$

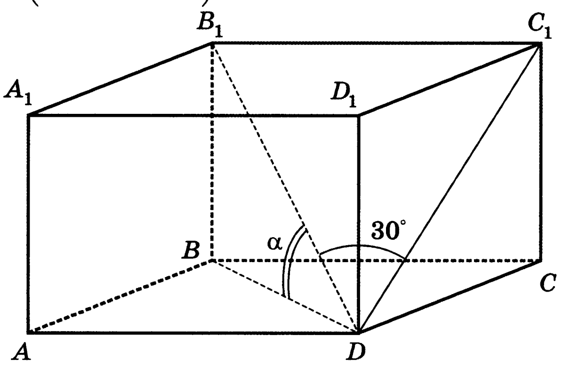
Найдите $S_{\text{сеч}} = S_{\triangle PTK}$. $\boxed{9\sqrt{6}}$



3. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная призма
$\left(\widehat{DB_1; DD_1C_1C}\right) = 30^\circ$

Найдите $\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right)$.



План решения

а) Докажите, что $\left(\widehat{DB_1; DD_1C_1C}\right) = \left(\widehat{DB_1; DC_1}\right)$;

$\left(\widehat{DB_1; ABCD}\right) = \left(\widehat{DB_1; DB}\right) = \alpha$.

б) Пусть $DB_1 = b$. Из $\triangle DB_1C_1$ найдите B_1C_1.

в) Из $\triangle B_1BD$ найдите $\angle B_1DB = \alpha$.

$\boxed{45^\circ}$.

4. Дано:

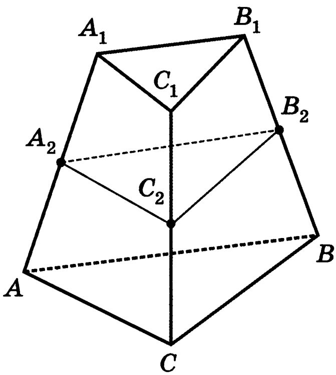
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида

$AC = 12$

$A_1C_1 = 8$

A_2, C_2, B_2 — середины боковых ребер

Найдите $S_{\triangle A_2B_2C_2}$.



План решения

а) Найдите A_2C_2, A_2B_2, B_2C_2.

б) Найдите $S_{\triangle A_2B_2C_2}$, зная, что $\triangle A_2B_2C_2$ — правильный.

$\boxed{25\sqrt{3}}$.

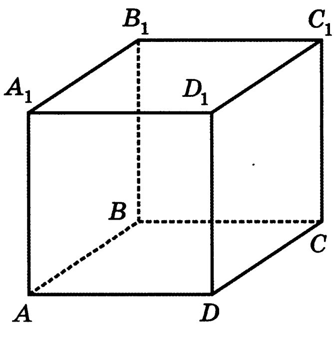
5. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед

$AB : AD : AA_1 = 3 : 6 : 22$

$DB_1 = 23$

Найдите $S_{\text{п.п.п}}$.



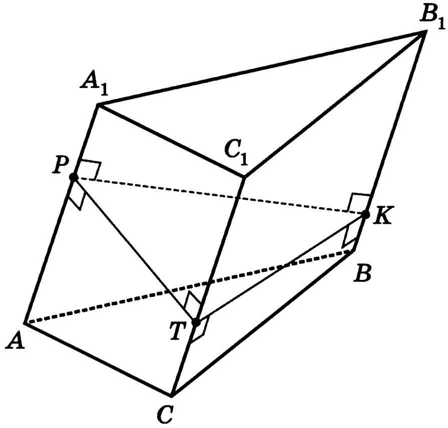
План решения

а) Так как $DB_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$,
то полагая, что $AB = 3x$, $AD = 6x$, $AA_1 = 22x$, найдите значение x, затем AB, AD, AA_1.

б) Вычислите площадь полной поверхности данного параллелепипеда.
$\boxed{432}$.

6. Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма
$AA_1C_1C \perp AA_1B_1B$
$AA_1 = 24$
$\rho(AA_1; CC_1) = 12$
$\rho(AA_1; BB_1) = 35$

Найдите $S_{б.п}$.



План решения

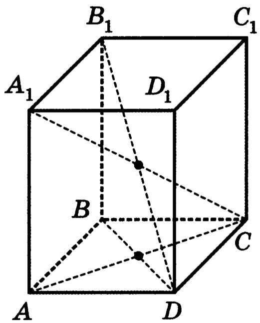
а) Так как $S_{б.п} = AA_1 \cdot P_{\triangle PKT}$, где $PKT \perp AA_1$, а значит $PT = 12$, $PK = 35$.

б) Так как $AA_1C_1C \perp AA_1B_1B$, то $PT \perp PK$. Найдите TK (по теореме Пифагора).

в) Найдите $P_{\triangle PKT}$ и $S_{б.п}$. $\boxed{2016}$.

7. Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед
$DB_1 = 88$
$A_1C = 92$
$AB = 15$
$AD = 16$

Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.



План решения

а) Обозначив $AA_1 = x$, найдите AC^2, BD^2.

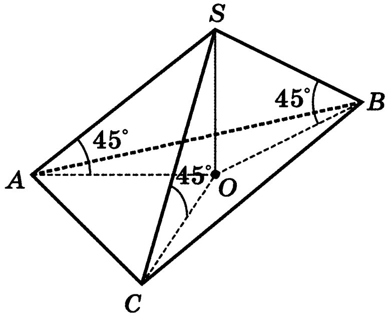
б) Используя метрические свойства параллелограмма
$2\left(AB^2 + AD^2\right) = AC^2 + BD^2$,
найдите значение $AA_1 = x$, а затем AC, BD.

в) Найдите S_{ABCD}.

г) Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. $\boxed{13\,860}$.

8. Дано:

$SABC$ — пирамида
$SO \perp ABCD$
$\left(\widehat{AS; ABC}\right) =$
$= \left(\widehat{BS; ABC}\right) =$
$= \left(\widehat{CS; ABC}\right) = 45°$
$AB = 16$
$AC = 15$
$BC = 17$



Найдите V_{SABC}.

План решения

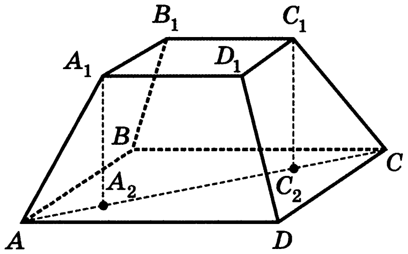
а) Так как боковые ребра равнонаклонены к плоскости основания, то если $SO \perp ABC$, значит O — центр описанной окружности, т. е. $AO = BO = CO$.

б) $\left(\widehat{AS; ABC}\right) = \angle SAO = 45°$,
значит $\underline{SO} = BO = \underline{R_{\text{о}\triangle ABC}}$.

в) Зная формулы $R_{\text{о}} = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$ и $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{\triangle ABC}$,
получим $S = \dfrac{abc}{4R_{\text{о}\triangle ABC}}$. Следовательно,
$V = \dfrac{1}{3} \cdot R_{\text{о}\triangle ABC} \cdot \dfrac{abc}{4R_{\text{о}\triangle ABC}}$, т. е. $V = \dfrac{abc}{12}$. $\boxed{340}$.

9. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная усеченная пирамида
$AB = 13$
$A_1B_1 = 5$
$AA_1 = 6$



Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

План решения

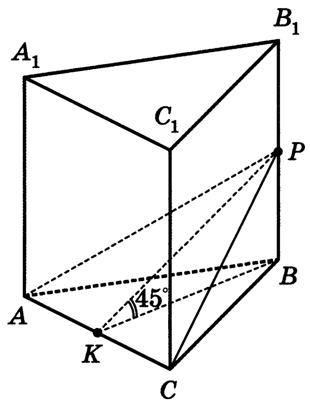
а) Докажите, что $AA_2 = \dfrac{AC - A_1C_1}{2}$. Найдя AA_2, вычислите из $\triangle AA_2A_1$ $A_1A_2 = H_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.

б) Так как $V_{\text{ус.пир}} = \dfrac{1}{3}H\left(S_{\text{в}} + \sqrt{S_{\text{в}} \cdot S_{\text{н}}} + S_{\text{н}}\right)$, то используя ее, вычислите $V_{\text{ус.пир}}$.

$\boxed{172\dfrac{2}{3}}$.

10. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная призма
$BP = PB_1$, $P \in BB_1$
$\left(\widehat{APC; ABC}\right) = 45^\circ$
$AB = 8$



Найдите $V_{ABCA_1B_1C_1}$.

План решения

а) Постройте $BK \perp AC$. Докажите, что $PK \perp AC$ и $\left(\widehat{APC; ABC}\right) = \angle PKB = 45^\circ$.

б) Из $\triangle ABC$ найдите BK, а затем из $\triangle PBK$ — BP.

в) Вычислите $V_{ABCA_1B_1C_1}$.

$\boxed{384}$.

Домашняя тренировочная работа 3 (Многогранники)

1. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, зная, что она больше его измерений соответственно на 10, 13 и 29.

2. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения, из которых одно проходит через диагональ основания, параллельно диагонали призмы, второе делит ось призмы в отношении $1:3$. Найдите отношение площадей таких сечений.

3. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями, равными $AC = 32$, $BD = 18$. Боковое ребро AS, перпендикулярное к плоскости основания, равно 24. Через вершину A и середину бокового ребра SC проведено сечение параллельно диагонали основания BD. Найдите площадь сечения.

4. Высота пирамиды проходит через вершину тупого угла ромба основания и равна H. Две другие боковые грани образуют с плоскостью основания углы в $30°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если сторона ромба равна одной из диагоналей.

5. Основанием наклонной призмы с боковым ребром, равным 10, является правильный треугольник со стороной, равной 15. Одно из боковых ребер образует с прилегающими сторонами основания угол в $70°$. Найдите наибольшую площадь боковой грани.

6. В каком отношении делится площадь полной поверхности параллелепипеда плоскостью, проведенной через концы трех ребер, исходящих из одной вершины?

7. Боковые ребра пирамиды равны 65. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция, боковая сторона которой равна 30, а основания ее равны 50 и 14. Найдите объем пирамиды.

8. В правильной усеченной пирамиде стороны оснований равны 12 и 6, а двугранный угол при большем основании равен $45°$. Найдите объем пирамиды.

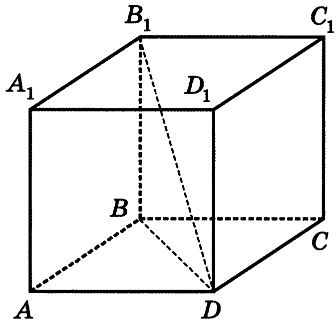
9. Диагонали правильной шестиугольной призмы равны 19 и 21. Найдите объем призмы.

10. В наклонном четырехугольном параллелепипеде две боковые грани взаимно перпендикулярны и имеют общее ребро, равное 10. Площади этих граней равны 64 и 45. Найдите объем параллелепипеда.

Домашняя тренировочная работа 3 (Многогранники). Чертеж. План решения

1. Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$DB_1 = BB_1 + 10$
$DB_1 = AB + 13$
$DB_1 = BC + 29$

Найдите DB_1.



План решения

Так как $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед, то $DB_1^2 = BB_1^2 + AB^2 + BC^2$.

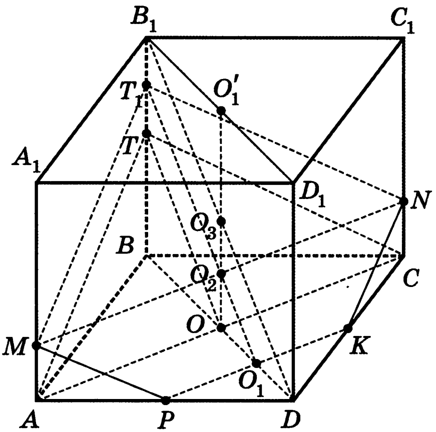
По условию $BB_1^2 = (DB_1 - 10)^2$, $AB^2 = (DB_1 - 13)^2$, $BC^2 = (DB_1 - 29)^2$.

Подставьте в формулу выражение соответствующих ребер через диагональ. Из получившегося квадратного уравнения найдите значение DB, учтя, что $DB_1 > 29$.

$\boxed{37}$.

2. Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — правильная четырехугольная призма
$ATC \parallel B_1D$; $T \in BB_1$
OO_1' — ось призмы
$OO_2 : O_2O_1' = 1 : 3$
$PMT_1NK \parallel B_1D$

Найдите $S_{PMT_1NK} : S_{\triangle ATC}$.



План решения

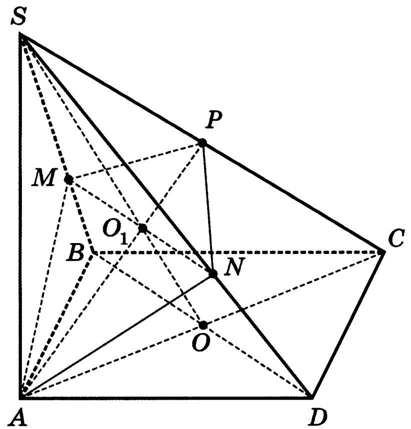
а) Найдите S_{PMT_1NK}, $S_{\triangle ATC}$. Докажите $PK = \frac{1}{2}AC$.

Решение аналогично решению задачи 2 из варианта А в предположении, что $AB = AD = b$ и $AA_1 = a$.

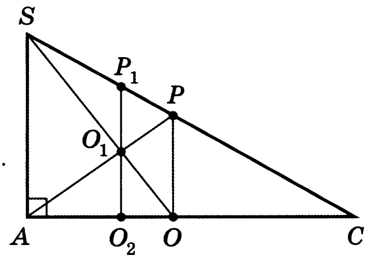
б) Найдите отношение $S_{PMT_1NK} : S_{\triangle ATC}$, при этом буквы a и b сократятся. $\boxed{7:4}$.

3. Дано:
$SABCDA_1B_1C_1D_1$ — пирамида
$SA \perp ABCD$
$ABCD$ — ромб
$AC = 32$; $BD = 18$;
$SA = 24$
$SP = PC$, $P \in SC$
$MN \parallel BD$;
$M \in SB$; $N \in SD$

Найдите S_{AMPN}.

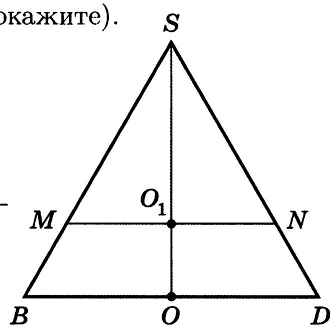


План решения



а) AP — медиана.
Так как $SA \perp AC$,
то $AP = PC$ (докажите).
Найдите $SC = 2PC$.
Докажите $PO \perp AC$,
где $O = AC \cap BD$.

б) Проведите $P_1O_2 \parallel SA$, где $O_1 = AP \cap SO$, $O_1 \in P_1O_2$.
Для трапеции $ASPO$ P_1O_2 — среднее гармоническое SA и PO (докажите), т. е. $P_1O_2 = \dfrac{2SA \cdot PO}{SA + PO}$.
Учтите, что $O_1O_2 = \frac{1}{2}P_1O_2$ (докажите).



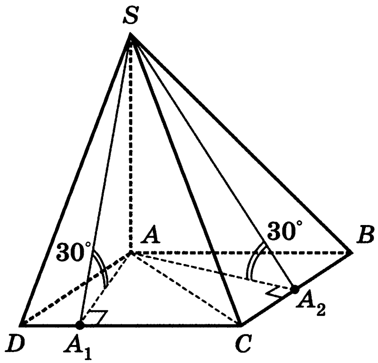
в) $\triangle SAO$ подобен $\triangle O_1O_2O$ (докажите).
$\dfrac{SA}{O_1O_2} = \dfrac{SO}{OO_1}$, после этого найдите $\dfrac{SO_1}{SO}$.

г) Рассмотрим $\triangle SBD$, он подобен $\triangle SMN$ (докажите).
$\dfrac{MN}{BD} = \dfrac{SO_1}{SO}$.

д) Зная AP и MN, вычислите $S_{AMPN} = \dfrac{1}{2}MN \cdot AP$. (Докажите, что $AMPN$ — дельтоид, т. е. $MN \perp AP$.) $\boxed{120}$.

4. Дано:
$SABCD$ — пирамида
$SA \perp ABCD$
$ABCD$ — ромб
$SA = H$, $\angle DAB > 90^\circ$
$\left(\widehat{SCB; ABCD}\right) =$
$= \left(\widehat{SDC; ABCD}\right) = 30^\circ$
$AD = AC$

Найдите $S_{\text{б.п}SABCD}$.



План решения

а) Учитывая, что $ABCD$ — ромб и $AD = AC$, найдите $\angle ABC = \alpha$.

б) Докажите, что $\left(\widehat{SDC; ABCD}\right) = \angle SA_1A = 30^\circ$, где $AA_1 \perp DC$.

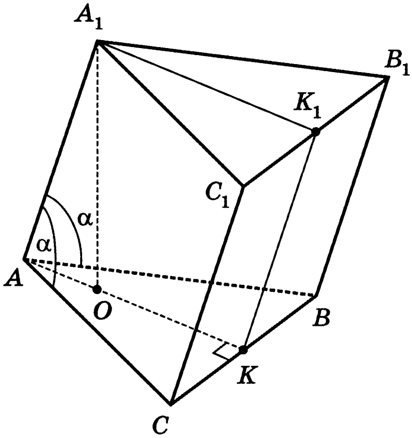
в) Найдите SA_1 из $\triangle SAA_1$.

г) Вычислите $S_{\triangle SDC}$, $S_{\triangle SCB}$, $S_{\triangle SAD}$, $S_{\triangle SAB}$.

д) Найдите $S_{\text{б.п}SABCD}$. $\boxed{5H^2}$.

5. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — наклонная призма
$\angle A_1AC = \angle A_1AB = 70°$
$\triangle ABC$ — правильный
$AA_1 = 10$
$AB = 15$



Найдите наибольшую площадь боковой грани.

План решения

а) Постройте $AK \perp CB$.

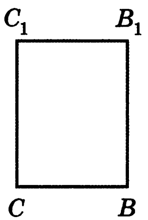
Докажите, что $AK = l_{CB}$.

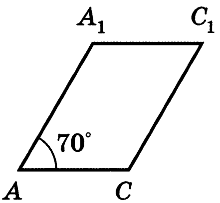
б) $\angle A_1AC = \angle A_1AB = \alpha = 70°$ (по условию).

Докажите, что тогда если $A_1O \perp ABC$, то $O \in AK$.

в) Проведите $KK_1 \parallel AA_1$ и докажите, что $KK_1 \perp CB$, т. е. что CC_1B_1B — прямоугольник, для которого $S_{CC_1B_1B} = CB \cdot BB_1$.

г) Очевидно, что $S_{CC_1B_1B} > S_{AA_1C_1C}$ $(AB = BC = AC)$.





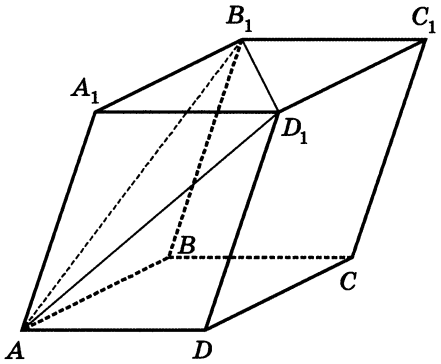
д) Вычислите $S_{CC_1B_1B}$.

$\boxed{150}$.

6. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед
AB_1D_1 — плоскость сечения

Найдите отношение, в котором делится площадь полной поверхности данным сечением.



План решения

а) Пусть $S_{AA_1D_1D}=S_1$, $S_{AA_1B_1B}=S_2$, $S_{ABCD}=S_3$, тогда
$S_{\triangle AA_1D_1}=\dfrac{1}{2}S_1$; $S_{\triangle AA_1B_1}=\dfrac{1}{2}S_2$; $S_{\triangle A_1B_1D_1}=\dfrac{1}{2}S_3$.

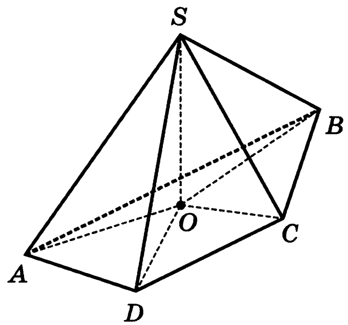
б) $S_{\text{п.п}ABCDA_1B_1C_1D_1}=2S_1+2S_2+2S_3$.

в) Найдите искомое отношение площадей. $\boxed{1:3}$.

7. Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — трапеция
$AD=BC=30$
$SA=SB=SC=SD=65$
$AB=50$, $DC=14$

Найдите V_{SABCD}.

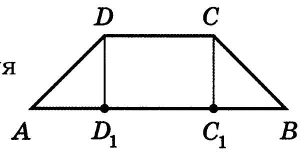


План решения

а) Так как боковые ребра равны, то $SO\perp ABCD$, где O — центр описанной окружности (докажите).

б) Проведем дополнительные построения в $ABCD$.
$CC_1\perp AB$, $DD_1\perp AB$. Найдите AD_1, BC_1, S_{ABCD}.

в) Так как $R_{\circ ABCD} = R_{\circ\triangle ACD}$, то найдите $R_{\circ\triangle ACD}$, используя формулу $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{a}{2\sin\alpha}$.



г) Из $\triangle ASO$ найдите $H_{SABCD} = SO$.

д) Вычислите V_{SABCD}. $\boxed{15\,360}$.

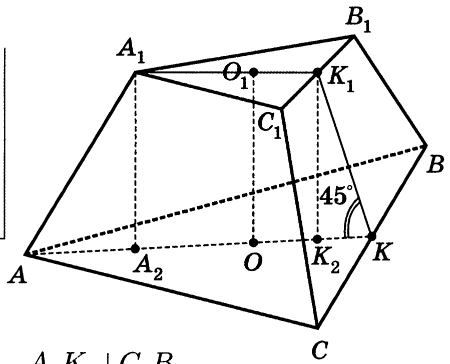
8. Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — правильная усеченная пирамида

$AC = 12$; $A_1C_1 = 6$

$\left(CC_1\widehat{B_1B; A}BC\right) = 45^\circ$

Найдите $V_{ABCA_1B_1C_1}$.



План решения

а) Постройте $AK \perp CB$, $A_1K_1 \perp C_1B_1$. Докажите, что $\left(CC_1\widehat{B_1B; A}BC\right) = \angle K_1KA = 45^\circ$.

б) Постройте $K_1K_2 \perp ABC$ и докажите, что $K_2 \in AK$.

в) Найдите $R_{\circ\triangle ABC}$, $R_{\circ\triangle A_1B_1C_1}$, затем OK, O_1K_1, далее найдите K_2K.

г) Найдите $H_{ABCA_1B_1C_1} = K_1K_2$.

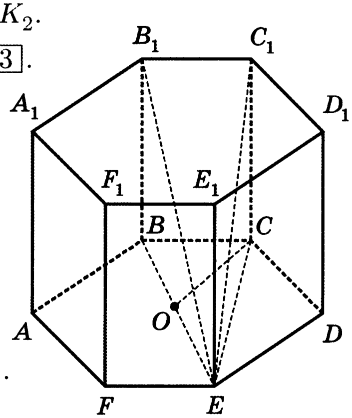
д) Вычислите $V_{ABCA_1B_1C_1}$. $\boxed{63}$.

9. Дано:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — правильная шестиугольная призма

$EB_1 = 21$; $EC_1 = 19$

Найдите $V_{ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1}$.



План решения

а) Докажите, что $\triangle EC_1B_1$ — прямоугольный, и вычислите значение B_1C_1.

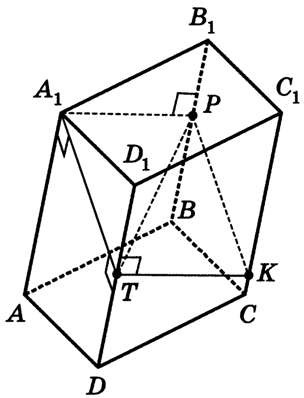
б) Найдите EB, а затем $BB_1 = H_{ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1}$.

в) Найдите $S_{ABCDEF} = 6S_{\triangle OBC}$ ($\triangle OBC$ — правильный).

г) Вычислите $V_{ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1}$. $\boxed{1320\sqrt{3}}$.

10. Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — наклонный параллелепипед
$S_{AA_1D_1D} = 64$
$S_{AA_1B_1B} = 45$
$AA_1 = 10$
$AA_1D_1D \perp AA_1B_1B$

Найдите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$.



План решения

а) Построим $A_1T \perp AA_1$, $A_1P \perp AA_1$, тогда $A_1PKT \perp AA_1$ (докажите).

б) Так как $S_{AA_1D_1D}$ и боковое ребро AA_1 известны, найдите A_1T. Аналогично найдите A_1P.

в) Найдите P_{A_1PKT}.

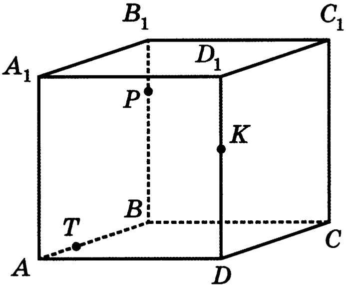
г) Так как $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = AA_1 \cdot P_{A_1PKT}$, вычислите $V_{ABCDA_1B_1C_1D_1}$. $\boxed{288}$.

Домашняя тренировочная работа 4 (Сечения)

Постройте сечение многогранника плоскостью, заданной точками P, K, T, принадлежащими различным ребрам многогранника.

1. Дано:

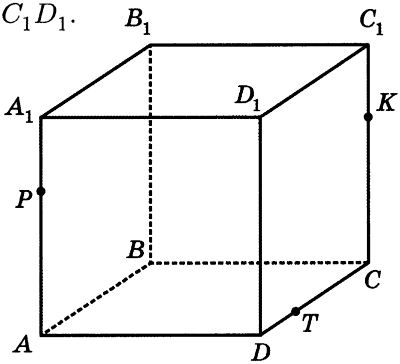
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in DD_1$
$T \in AB$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2. Дано:

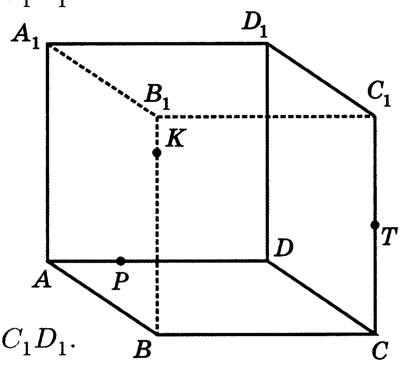
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in AA_1$
$K \in CC_1$
$T \in DC$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

3. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in AD$
$K \in BB_1$
$T \in CC_1$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

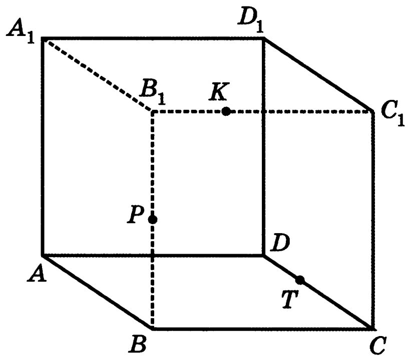


Постройте $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

4. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in B_1C_1$
$T \in DC$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

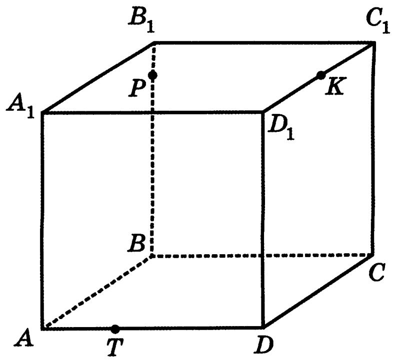
Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.



5. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in D_1C_1$
$T \in AD$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

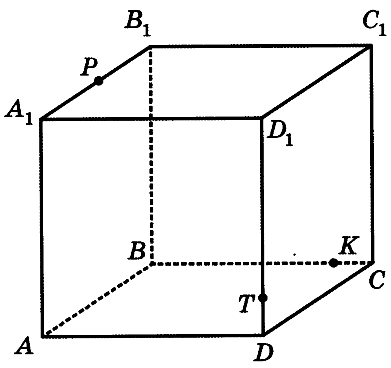
Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.



6. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in A_1B_1$
$K \in BC$
$T \in DD_1$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

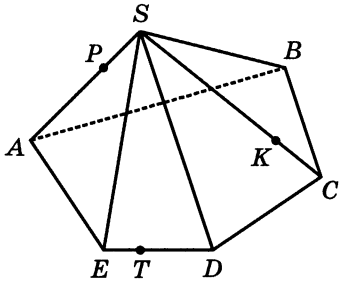
Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.



7. Дано:

$SABCDE$ — пирамида
$P \in AS$
$K \in SC$
$T \in ED$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

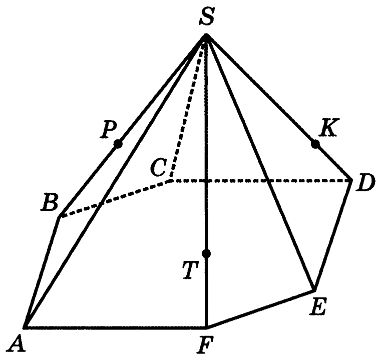
Постройте $\alpha \cap SABCDE$.



8. Дано:

$SABCDEF$ — пирамида
$P \in SB$
$K \in SD$
$T \in SF$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

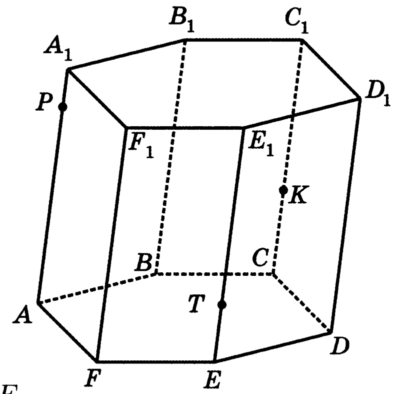
Постройте $\alpha \cap SABCDEF$.



9. Дано:

$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — наклонная шестиугольная призма
$P \in AA_1$
$K \in CC_1$
$T \in EE_1$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

Постройте
$\alpha \cap ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



10. Дано:

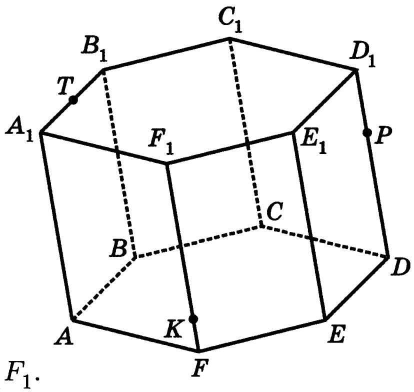
$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ — наклонная призма

$P \in DD_1$

$K \in FF_1$

$T \in A_1B_1$, где точки P, K, T определяют плоскость α

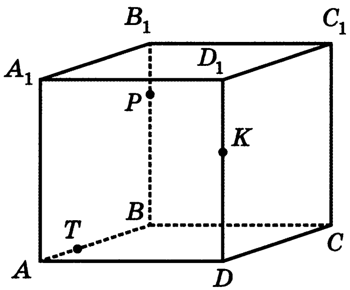
Постройте $\alpha \cap ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$.



Решение домашней тренировочной работы 4 (Сечения)

1. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in DD_1$
$T \in AB$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

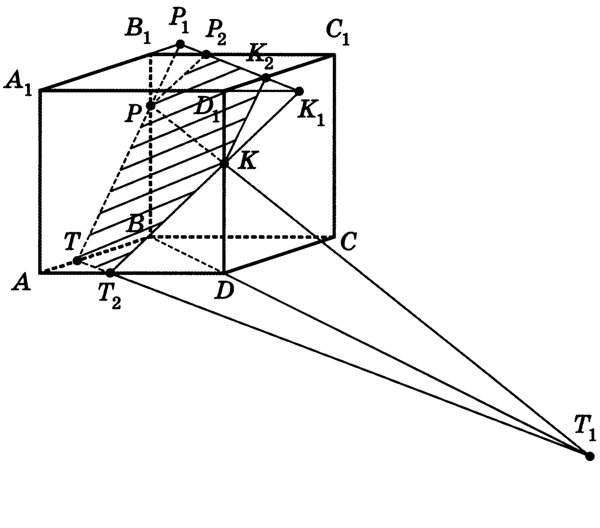
Построение:

а) $PK \cap BD = T_1$; $TT_1 \cap AD = T_2$;

б) $TP \cap A_1B_1 = P_1$; $T_2K \cap A_1D_1 = K_1$;

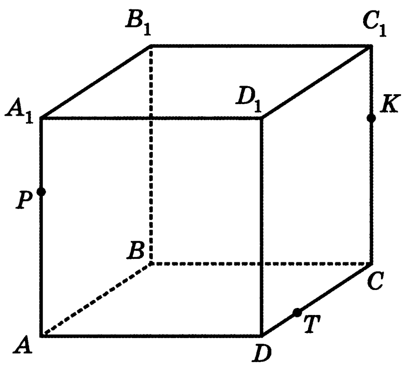
в) $P_1K_1 \cap B_1C_1 = P_2$; $P_1K_1 \cap D_1C_1 = K_1$.

$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = TPP_2K_2KT_2$.



2. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in AA_1$
$K \in CC_1$
$T \in DC$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

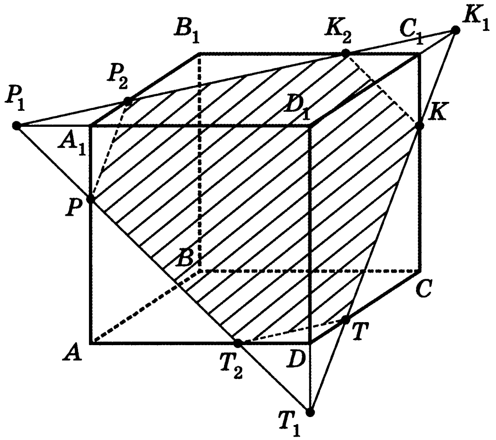
Построение:

а) $TK \cap D_1C_1 = K_1$; $TK \cap DD_1 = T_1$;

б) $PT_1 \cap AD = T_2$; $PT_1 \cap A_1D_1 = P_1$;

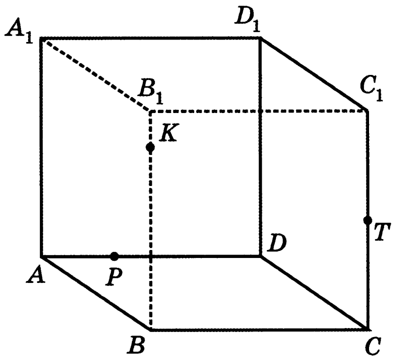
в) $P_1K_1 \cap A_1B_1 = P_2$; $P_1K_1 \cap B_1C_1 = K_2$.

$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = PP_2K_2KTT_2$.



3. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in AD$
$K \in BB_1$
$T \in CC_1$, где точки P, K, T определяют плоскость α



Постройте $\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

Построение:

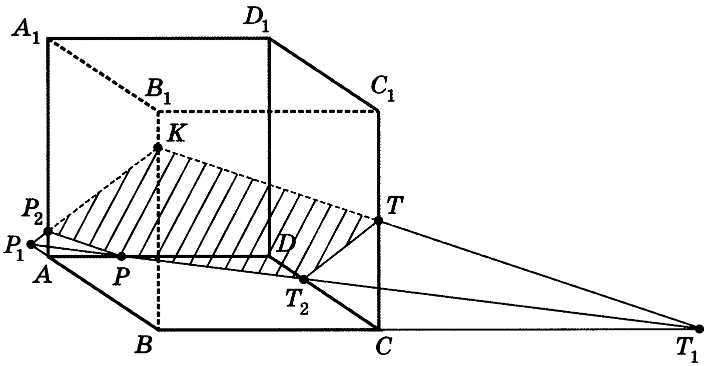
а) $KT \cap BC = T_1$;

б) $PT_1 \cap DC = T_2$;

в) $PT_1 \cap AB = P_1$;

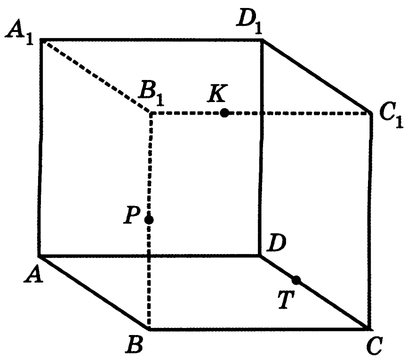
г) $P_1K \cap AA_1 = P_2$.

$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = PP_2KTT_2$.



4. Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in B_1C_1$
$T \in DC$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

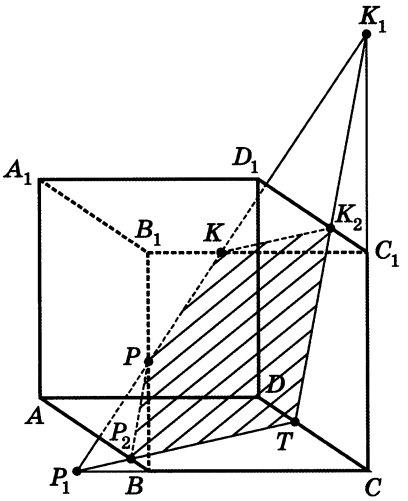
Построение:

а) $PK \cap CC_1 = K_1$;
$PK \cap BC = P_1$;

б) $TK_1 \cap D_1C_1 = K_2$;

в) $P_1T \cap AB = P_2$.

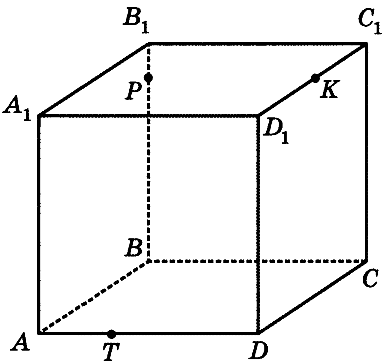
$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = PKK_2TP_2$.



5. Дано:

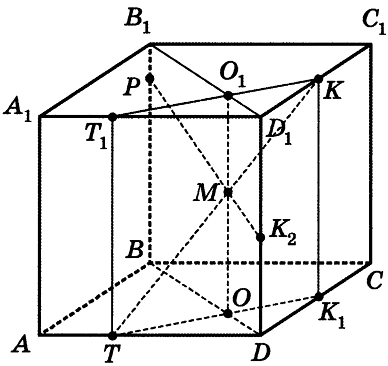
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб
$P \in BB_1$
$K \in D_1C_1$
$T \in AD$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

Постройте
$\alpha \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.



а) Дополнительное построение

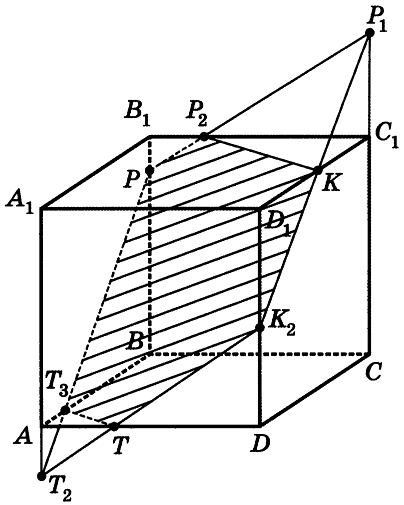
1. Построим BB_1D_1D.
2. $TT_1 \parallel DD_1$, $KK_1 \parallel DD_1$, тогда $TT_1K_1K \parallel DD_1$.
3. Найдем $TT_1KK_1 \cap BB_1D_1D = OO_1$.
4. Найдем $TK \cap OO_1 = M$.
5. Найдем $PM \cap DD_1 = K_2$ — дополнительная точка на ребре DD_1.



б) Основное построение

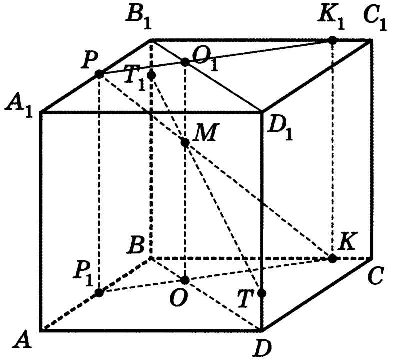
1. $TK_2 \cap AA_1 = T_2$;
2. $T_2P \cap AB = T_3$;
3. $K_2K \cap CC_1 = P_1$;
4. $PP_1 \cap B_1C_1 = P_2$.

$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = PP_2KK_2TT_3$.



6. а) Дополнительное построение

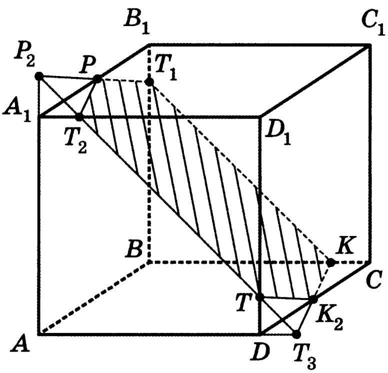
1. Построим $PP_1 \parallel BB_1$, $KK_1 \parallel BB_1$, значит $PP_1K_1K \parallel BB_1$.
2. Построим BB_1D_1D.
3. Найдем $BB_1D_1D \cap PP_1K_1K = OO_1$.
4. Найдем $PK \cap OO_1 = M$.
5. Найдем $MT \cap BB_1 = T_1$ — дополнительная точка на ребре BB_1.



б) Основное построение

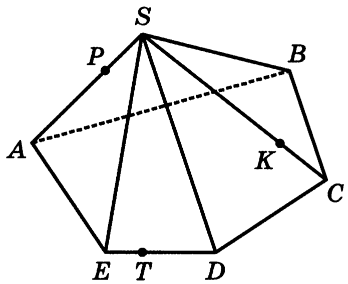
1. $T_1P \cap AA_1 = P_2$;
2. $P_2T \cap A_1D_1 = T_2$;
3. $P_2T \cap AD = T_3$;
4. $KT_3 \cap DC = K_2$.

$PKT \cap ABCDA_1B_1C_1D_1 = TT_2PT_1KK_2$.



7. Дано:

$SABCDE$ — пирамида
$P \in AS$
$K \in SC$
$T \in ED$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α



Постройте $\alpha \cap SABCDE$.

Построение:

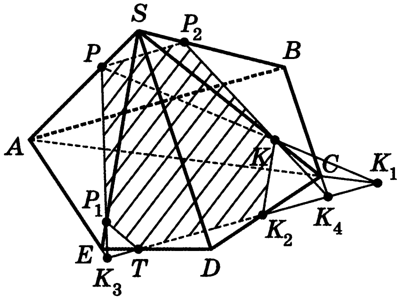
а) $PK \cap AC = K_1$;

б) $K_1T \cap DC = K_2$; $K_1T \cap AE = K_3$; $K_1T \cap BC = K_4$;

в) $PK_3 \cap SE = P_1$;

г) $K_4K \cap SB = P_2$.

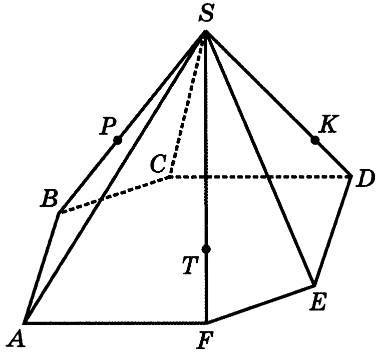
$PKT \cap SABCDE = TP_1PP_2KK_2$.



8. Дано:

$SABCDEF$ — пирамида
$P \in SB$
$K \in SD$
$T \in SF$, где точки
P, K, T определяют
плоскость α

Постройте
$\alpha \cap SABCDEF$.



Построение:

а) $PK \cap BD = K_1$;

б) $PT \cap BF = T_1$;

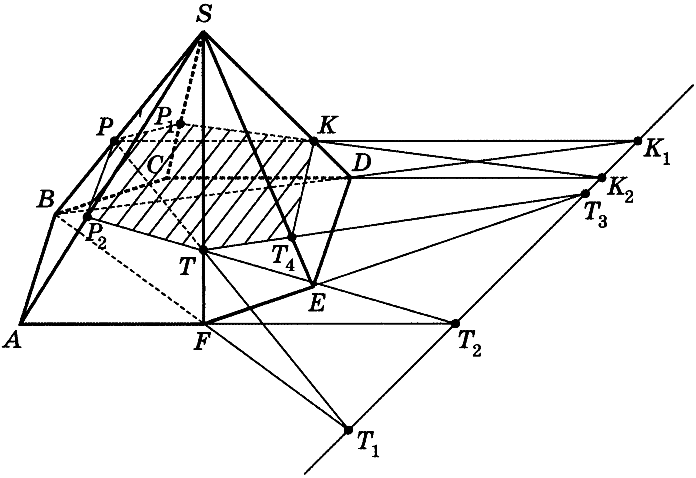
T_1K_1 — опорная прямая;

в) $CD \cap T_1K_1 = K_2$; $KK_2 \cap SC = P_1$;

г) $T_1K_1 \cap AF = T_2$; $TT_2 \cap AS = P_2$;

д) $T_1K_1 \cap FE = T_3$; $TT_3 \cap SE = T_4$.

$PKT \cap SABCDEF = PP_1KT_4TP_2$.



9. Построение:

а) $PT \cap AE = T_1$;

б) $PK \cap AC = K_1$;

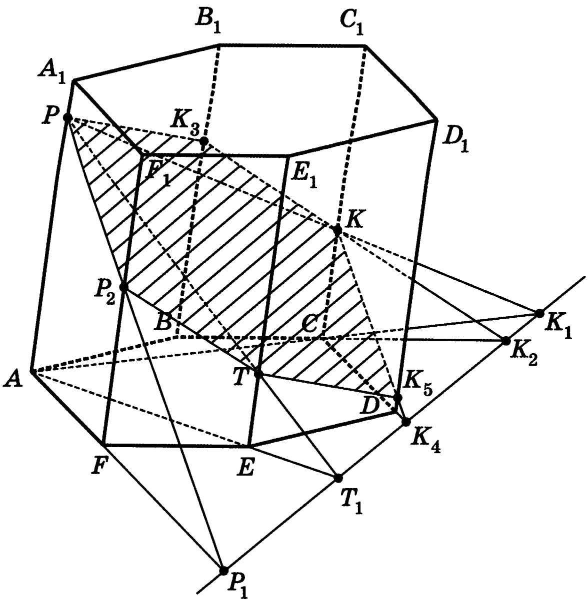
T_1K_1 — опорная прямая, $TK \in \alpha$;

в) $T_1K_1 \cap BC = K_2$; $KK_2 \cap BB_1 = K_3$;

г) $T_1K_1 \cap CD = K_4$; $KK_4 \cap DD_1 = K_5$;

д) $T_1K_1 \cap AF = P_1$.

$PKT \cap ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1 = PK_3KK_5TP_2$.



10. Построение:

а) $KP \cap F_1D_1 = P_1$,

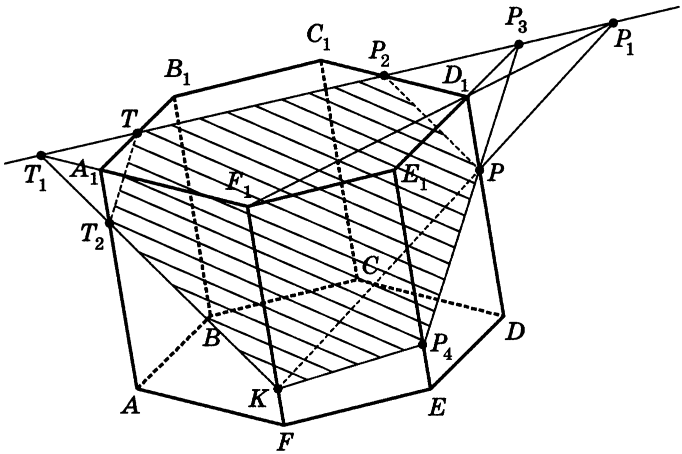
TP_1 — опорная прямая;

б) $TP_1 \cap D_1C_1 = P_2$; $TP_1 \cap A_1F_1 = T_1$;

в) $T_1K \cap AA_1 = T_2$;

г) $TP_1 \cap E_1D_1 = P_3$; $PP_3 \cap EE_1 = P_4$.

$PKT \cap ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1 = TP_2PP_4KT_2$.



Домашняя тренировочная работа 5 (Призмы)

Вариант 1

Все ребра треугольной призмы равны 10. Одно из боковых ребер образует с каждой прилежащей стороной основания угол в 45°. Найдите:

а) объем призмы;

б) площадь боковой поверхности призмы.

Вариант 2

Боковое ребро треугольной призмы со сторонами основания, равными 13, 13 и 10, образует с равными сторонами угол в 30° и равно 10. Найдите:

а) объем призмы;

б) расстояние от бокового ребра до скрещивающейся с ним наименьшей стороной основания.

Вариант 3

В основании прямого параллелепипеда лежит ромб с острым углом в 30°. Через сторону основания и середину противоположного бокового ребра, равного 10, проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол в 45°. Найдите:

а) объем отсеченной от параллелепипеда треугольной призмы;

б) площадь боковой поверхности полученной призмы;

в) котангенс угла между наибольшей из диагоналей параллелепипеда и боковой гранью параллелепипеда.

Вариант 4

Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 46. Измерения параллелепипеда относятся как $6 : 22 : 3$. Через диагональ основания и вершину верхнего основания проведена плоскость, отсекающая от параллелепипеда пирамиду. Найдите:

а) объем пирамиды;

б) площадь сечения;

в) тангенсы углов между плоскостью сечения и гранями параллелепипеда.

Вариант 5

В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 10 и 12, а боковое ребро 9,6. Через наибольшую из диагоналей боковых граней проведена плоскость, перпендикулярная другой боковой грани. Найдите:

а) площадь сечения призмы данной плоскостью;

б) тангенс угла между плоскостью сечения и плоскостью основания;

в) расстояние между скрещивающимися диагоналями равных боковых граней.

Вариант 6

В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 10 и 16, а боковое ребро 9,6. Через наибольшую из диагоналей боковых граней проведена плоскость, перпендикулярная другой боковой грани. Найдите:

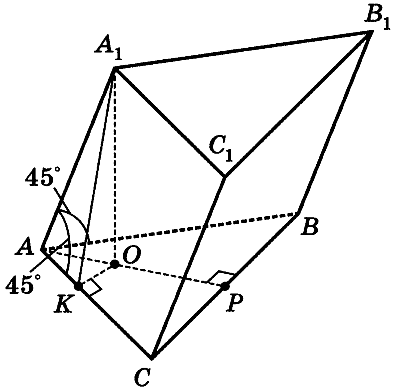
а) площадь сечения призмы данной плоскостью;

б) тангенс угла между плоскостью сечения и плоскостью основания;

в) расстояние между скрещивающимися диагоналями равных боковых граней.

Домашняя тренировочная работа 5 (Призмы). Чертеж. План решения

Вариант 1



Дано:
$ABCA_1B_1C_1$ — призма,
все ребра равны 10
$\angle A_1AC = \angle A_1AB = 45°$

Найдите:
а) объем призмы;
б) $S_{\text{б.п.п}}$.

План решения

а) 1. Постройте $A_1O \perp ABC$.

Докажите, что $O \in l_{BC} = H_{BC} = AP$.

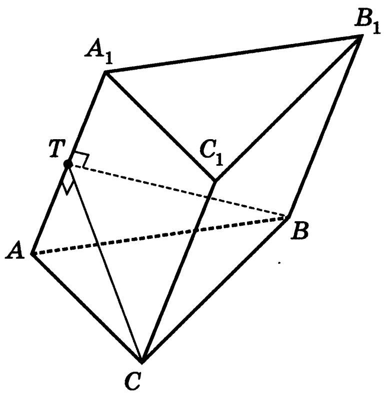
Постройте $OK \perp AC$.

Докажите $A_1K \perp AC$.

2. Найдите AK из $\triangle AA_1K$, AO из подобия $\triangle AKO$ и $\triangle APC$, A_1O из $\triangle A_1AO$.

3. Вычислите AP, $S_{\triangle ABC}$, $V_{ABCA_1B_1C_1}$.

$\boxed{125}$.



б) 1. Постройте $CT \perp AA_1$.

Докажите $BT \perp AA_1$;

$AA_1 \perp CTB$.

2. Из $\triangle ATC$ найдите TC,

затем $P_{\triangle ATC}$.

3. $S_{\text{б.п.п}} = AA_1 \cdot P_{\triangle ATC}$;

$\boxed{100\left(\sqrt{2}+1\right)}$.

Вариант 2

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$— призма

$\angle A_1AC = \angle A_1AB = 30°$

$AA_1 = 10$

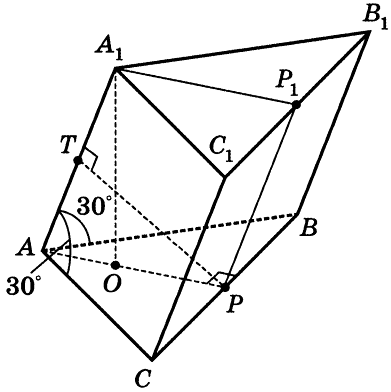
$AB = AC = 13$

$BC = 10$

Найдите:

а) объем призмы;

б) $\rho(AA_1; BC)$.



План решения

а) Решение задачи аналогично решению пункта а) задачи варианта 1.

$\boxed{25\sqrt{69}}$.

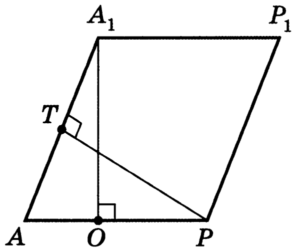
б) 1. Постройте $CTB \perp AA_1$ (см. задачу б) варианта 1).

2. Докажите $TP \perp AA_1$.

3. Докажите $AA_1P_1P \perp BC$; $TP \perp BC$.

4. Используя метод площадей, из AA_1P_1P найдите $TP = \dfrac{AP \cdot A_1O}{AA_1}$.

Докажите $\rho(AA_1; BC) = TP$. $\boxed{0{,}5\sqrt{69}}$.



Вариант 3

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямой параллелепипед

$AA_1 \perp ABCD$; $AA_1 = 10$

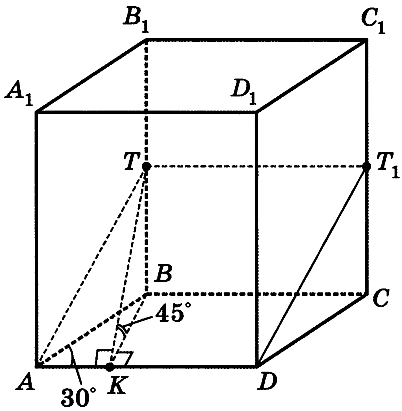
$BT = B_1T$; $T \in BB_1$

$ABCD$ — ромб

$\angle BAD = 30°$

ATD — плоскость сечения

$\left(\widehat{ABCD; ATD}\right) = 45°$



Найдите:

а) V_{ATBDT_1C};

б) $S_{\text{б.п.п}\,ATBDT_1C}$;

в) $\left(\widehat{A_1C; AA_1D_1D}\right)$.

План решения

а) 1. Постройте сечение $ATD \cap ABCDA_1B_1C_1D_1$.

2. Постройте $BK \perp AD$.

3. Докажите $BTK \perp AD$.

4. Из $\triangle BTK$ найдите BK; из $\triangle ABK$ найдите AB.

5. Найдите $S_{\triangle BTK}$, V_{ATBDT_1C}, где $V = S_{\triangle BTK} \cdot AD$.

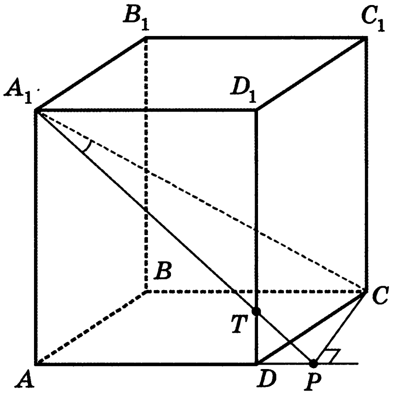
$\boxed{125}$.

б) Найдите $P_{\triangle BTK}$; $S_{\text{б.п.п}\,ATBDT_1C}$,

где $S_{\text{б.п.п}} = AD \cdot P_{\triangle BTK}$.

$\boxed{50\left(\sqrt{2}+2\right)}$.

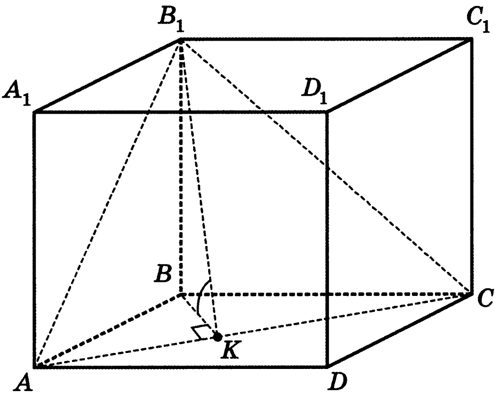
в)



1. Постройте $CP \perp AD \quad (\angle ADC > 90^\circ)$.
2. Докажите $CP \perp AA_1D_1D, \quad CP \perp A_1P$,
   $\left(\widehat{A_1C; AA_1D_1D}\right) = \angle CA_1P$.
3. Вычислите $CP, \ DP, \ A_1P$.
4. Из $\triangle A_1AC \quad \operatorname{ctg}(\angle CA_1P) = \dfrac{A_1P}{CP}$. $\boxed{\sqrt{11+4\sqrt{3}}}$.

Вариант 4

Дано:
$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольный параллелепипед
$DB_1 = 46$
$AD : AA_1 : AB =$
$= 6 : 22 : 3$
AB_1C — плоскость сечения



Найдите:
а) объем пирамиды B_1ABC;
б) S_{AB_1C};
в) 1. $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B)$, 2. $\operatorname{tg}\left(\angle C\underline{AB_1}B\right)$, 3. $\operatorname{tg}\left(\angle A\underline{B_1C}B\right)$.

План решения

а) 1. Пусть $AD = 6x$; $AA_1 = 22x$; $AB = 3x$.
Учитывая, что $DB_1^2 = AD^2 + AA_1^2 + A_1B_1^2$,
найдите значения AD, AA_1, AB.

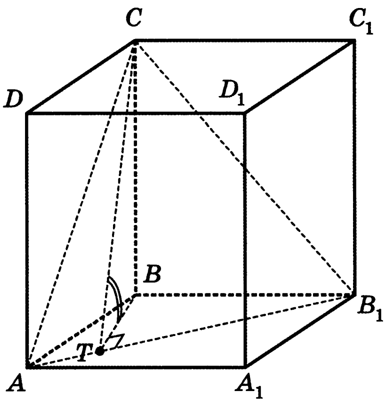
2. Так как $V_{B_1ABC} = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot BB_1$,
вычислите V_{B_1ABC}. $\boxed{528}$.

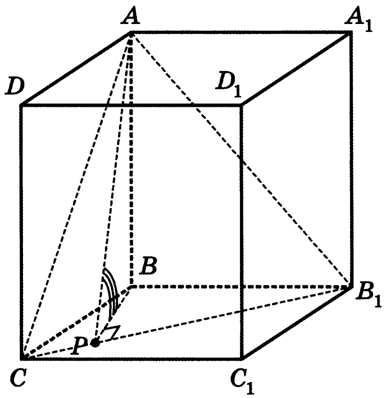
б) 1. Постройте $BK \perp AC$. Докажите $B_1K \perp AC$.

2. Найдите AC, BK, используя метод площадей.
$BK = \dfrac{AB \cdot BC}{AC}$.

3. Вычислите B_1K, S_{AB_1C}. $\boxed{12\sqrt{614}}$.

в) 1. Из $\triangle B_1BK$ $\operatorname{tg}(\angle B_1\underline{AC}B) = \dfrac{BB_1}{BK}$. $\boxed{\dfrac{11}{3}\sqrt{5}}$.

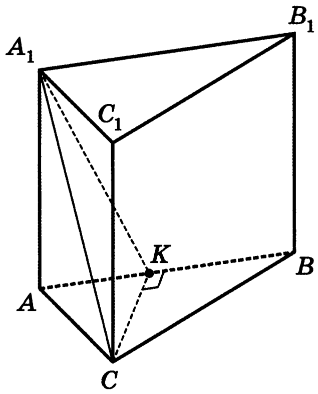




2. Найдите AB_1.
Постройте $BT \perp AB_1$ (основание ABB_1A_1).
Докажите $BTC \perp AB_1$. Найдите BT.
$\operatorname{tg}\left(\angle C\underline{AB_1}B\right) = \dfrac{BC}{BT}$. $\boxed{\dfrac{3}{11}\sqrt{55}}$.

3. Решение аналогично, $\boxed{\dfrac{\sqrt{130}}{22}}$ (основание CBB_1C_1).

Вариант 5



Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма
$AA_1 \perp ABC$
$AA_1 = 9{,}6$
$AB = BC = 10$
$AC = 12$
$A_1C \in \alpha$
$\alpha \perp AA_1B_1B$

Найдите:

а) $S_{\alpha \cap ABCA_1B_1C_1}$; б) $\operatorname{tg}\left(\widehat{\alpha; ABC}\right)$; в) $\rho(AB_1; C_1B)$.

План решения

а) 1. Постройте $CK \perp AB$ (проверьте, что $\angle ABC < 90^\circ$).

2. Докажите
$CK \perp AA_1B_1B$; $A_1CK \perp AA_1B_1B$; $A_1K \perp CK$.

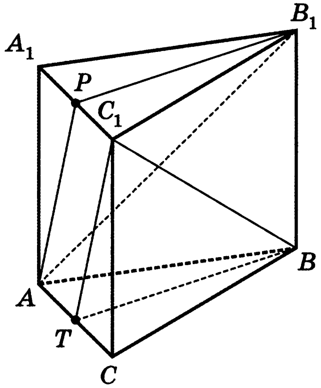
3. Найдите CK, AK, A_1K.

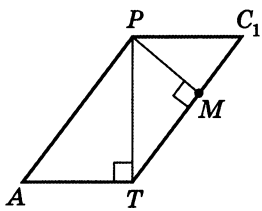
4. Вычислите $S_{\triangle A_1KC}$. $\boxed{57{,}6}$.

б) 1. Так как $AA_1K \perp CK$, то $\left(\widehat{A_1KC; ABC}\right) = \angle A_1KA$.

2. Вычислите $\operatorname{tg}(\angle A_1KA)$. $\boxed{\dfrac{4}{3}}$.

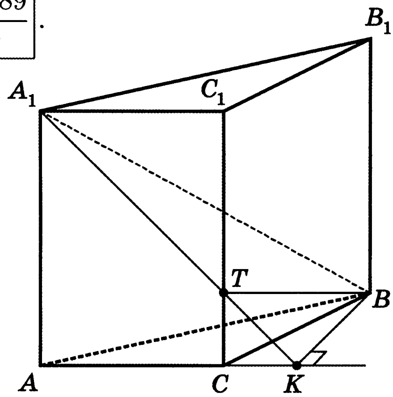
в)





1. Постройте $B_1P \perp A_1C_1$. Докажите $B_1P \perp AA_1C_1C$.
2. Постройте $BT \perp AC$.
3. Докажите $BT \perp AA_1C_1C$. Докажите $B_1PA \parallel BTC_1$. Докажите $\rho(A_1B; C_1B) = \rho(B_1PA; BTC_1) = \rho(AP; TC_1)$ Из APC_1T методом площадей найдите PM.

$PM = \dfrac{AT \cdot PT}{AP}$. $\boxed{\dfrac{48\sqrt{89}}{89}}$.



Вариант 6

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма
$AA_1 \perp ABC$
$AB = 16;\ AC = BC = 10;$
$AA_1 = 9{,}6;\ A_1B \in \alpha$
$\alpha \perp AA_1C_1C$

Найдите:

а) $S_{\alpha \cap ABCA_1B_1C_1}$; б) $\operatorname{tg}\left(\widehat{\alpha; ABC}\right)$; в) $\rho\left(AC_1; CB_1\right)$.

План решения

а) 1. Докажите $\angle ACB > 90°$.

2. Постройте $BK \perp AC$.

3. Докажите $BK \perp AA_1C_1C$; $BK \perp A_1K$.

4. Найдите BK, используя метод площадей:

$BK = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AC}$, где $S_{\triangle ABC}$ вычислите по теореме Герона (или иначе).

Из $\triangle BCK$ найдите CK. Из $\triangle A_1AK$ найдите A_1K.

5. Из подобия $\triangle A_1AK$ и $\triangle TCK$ найдите TK и A_1T.

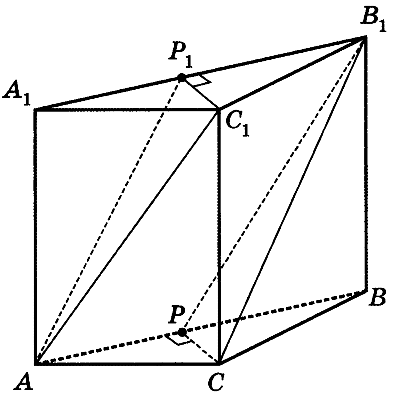
6. $S_{\alpha \cap ABCA_1B_1C_1} = S_{\triangle A_1BT}$. Найдите $S_{\triangle A_1BT} = \dfrac{1}{2} A_1T \cdot BK$.

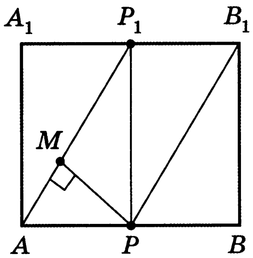
$\boxed{60}$.

б) 1. Докажите $\left(\widehat{ABC; A_1BT}\right) = \angle A_1KA$.

2. Вычислите $\operatorname{tg}(\angle A_1KA) = \dfrac{AA_1}{AK}$. $\boxed{0{,}75}$.

в)





1. Постройте $CP \perp AB$; $C_1P_1 \perp A_1B_1$.
2. Докажите, что $AP_1 \parallel PB_1$; $CP \parallel C_1P_1$,
   тогда $AP_1C_1 \parallel PB_1C$, $AP_1C_1 \perp AA_1B_1B$.
3. Докажите
   $\rho(AC_1; CB_1) = \rho(AP_1C_1; PB_1C) = \rho(AP_1; PB_1)$.
4. Из параллелограмма AP_1B_1P найдите $PM \perp AP_1$,
   используя метод площадей. $PM = \dfrac{AA_1 \cdot AP}{AP_1}$.
5. Так как $\rho(AC_1; CB_1) = PM$, вычислите PM.
   $\boxed{\dfrac{48\sqrt{61}}{61}}$.

Задачи-ловушки

Для выяснения справедливости утверждения или его опровержения приведите пример, контрпример или приведите доказательство.

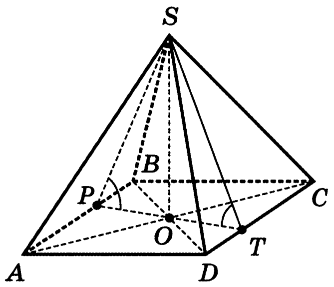
1. Будет ли пирамида правильной, если у нее равны все плоские углы при вершине и двугранные углы при основании?
2. Существует ли четырехугольная пирамида, у которой две противоположные боковые грани перпендикулярны плоскости основания?
3. Можно ли из проволоки длиной 68 см изготовить каркасную модель правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной 10 см?
4. Будет ли пирамида правильной, если у нее равны все плоские углы при вершине и все двугранные углы при боковых ребрах?
5. Правильная четырехугольная усеченная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через середины боковых ребер. Принадлежит ли точка пересечения диагоналей усеченной пирамиды этой плоскости?
6. Для каркаса правильной усеченной пирамиды, у которой стороны оснований равны 10 см и 20 см, а высота — 20 см, выделено 204 см проволоки. Хватит ли ее для изготовления каркаса?
7. Равны ли объемы двух пирамид с равными высотами, если их основаниями являются четырехугольники с соответственно равными сторонами?
8. В шестигранном многограннике две грани (основания) параллельны и являются неравными прямоугольниками, параллельные стороны оснований которых пропорциональны. Является ли такой многогранник усеченной пирамидой?

Решение задач-ловушек

1. Нет. Приведем контрпример.

Дано:

$SABCD$ — пирамида
$ABCD$ — ромб
$AC = 8$; $BD = 6$
$O = AC \cap BD$
$SO \perp ABCD$
$SO = 10$



Докажите, что:

а) $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA$;

б) $\angle S\underline{AB}C = \angle S\underline{BC}D = \angle S\underline{CD}A = \angle S\underline{DA}B$.

а) 1. $AB = BC = DC = AD = \sqrt{AO^2 + BO^2}$,
т. е. $AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

2. $SA = SC = \sqrt{AO^2 + SO^2}$;
$SA = \sqrt{4^2 + 10^2} = \sqrt{116} = 2\sqrt{29}$.

3. $SB = SD = \sqrt{OD^2 + SO^2}$; $SD = \sqrt{3^2 + 10^2} = \sqrt{109}$.

4. $\triangle ASD = \triangle CSD$ по III признаку равенства треугольников, так как $SA = SC$, $AD = DC$, SD — общая.
Значит $\angle CSD = \angle DSA$.

Аналогично доказывается,
что $\triangle ASB = \triangle ASD$ и $\triangle CSB = \triangle CSD$.

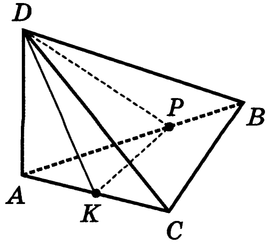
Следовательно, первое условие выполнено.

б) Так как $O = AC \cap BD$ и $SO \perp ABCD$, то вершина ортогонально проецируется в центр вписанной окружности, и двугранные углы при сторонах основания равны между собой (докажите).

Значит, второе условие также выполнено.

Но так как $ABCD$ не квадрат, то $SABCD$ правильной пирамидой не является.

2. Да. Приведем пример.



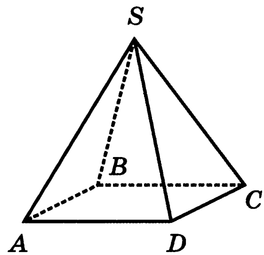
а) Пусть $DABC$ — пирамида, $DA \perp ABC$, тогда $ADB \perp ABC$; $ADC \perp ABC$.

б) Рассечем пирамиду плоскостью DPK, где $P \in AB$, а $K \in AC$.

Получим пирамиду $DPBCK$, у которой противоположные грани $DPB \perp PBCK$ и $DCK \perp ABC$.

Возможно при этом, что $KP \parallel BC$, но это не принципиально.

3. Нет. Проведем расчеты и выясним, возможно ли это.



Дано:
$SABCD$ — правильная пирамида
$P_{\text{ребер}} = 68$ см
$AB = 10$ см

а) Так как $P_{\text{ребер}} = 4 \cdot AB$, т. е. $P_{ABCD} = 40$, то на сумму боковых ребер приходится 28, а на каждое боковое ребро — 7 ($AS = BS = CS = DC$).

б) $AC = AB \cdot \sqrt{2}$, т. е. $AC = 10 \cdot \sqrt{2}$.

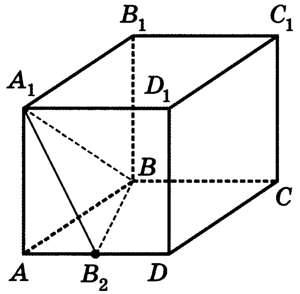
Значит чтобы существовала правильная пирамида с такими метрическими данными, необходимо $2 \cdot AS > AC$ (правило треугольника).

$14 > 10\sqrt{2} \Leftrightarrow 7 > 5\sqrt{2} \Leftrightarrow 49 > 50$ — ложь.

Отсюда следует, что из проволоки длиной 68 см сделать каркас правильной пирамиды со стороной основания 10 см невозможно.

4. Нет, приведем контрпример.

От куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отсечем плоскостью A_1BB_2 (где B_2 не совпадает с D) пирамиду AA_1BB_2, у которой:



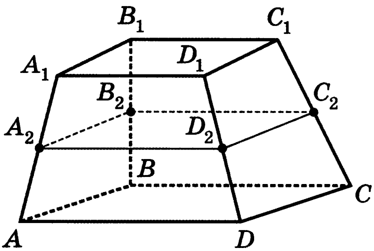
а) $\angle A_1AB = \angle BAB_2 = \angle B_2AA_1 = 90°$;

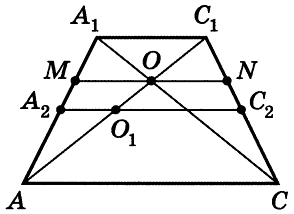
б) двугранные углы при ребрах AA_1, AB и AB_2 — прямые, т. е. равны $90°$.

Очевидно, что такая пирамида правильной не является ($AD = 2AB_2$).

5. Нет.

Рассмотрим диагональное сечение AA_1C_1C.





Диагонали усеченной пирамиды:

$AC_1 \subset AA_1C_1C$; $\quad A_1C \subset AA_1C_1C$; $\quad AC_1 \cap A_1C = O$.

а) $\triangle AOC \sim \triangle A_1OC_1$, тогда $\dfrac{AO}{OC_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$,

значит $O \in A_2C_2$ ($O \equiv O_2$ — точки совпадают), только если $AO = OC$, тогда $AC = A_1C_1$. Но это уже не трапеция, а параллелограмм.

б) Можно иначе.

1. $A_2C_2 = \dfrac{AC + A_1C_1}{2}$;

2. $MN \parallel AC$, тогда по теореме о среднем гармоническом $MN = \dfrac{2 \cdot AC \cdot A_1C_1}{AC + A_1C_1}$.

Очевидно, что в общем случае они не совпадают.

Значит $O \notin A_2B_2C_2D_2$.

6. Ответить на вопрос можно, только конкретно просчитав сумму длин ребер.

Сделаем прикидку.

Вычислим сумму периметров P_{ABCD} и $P_{A_1B_1C_1D_1}$:

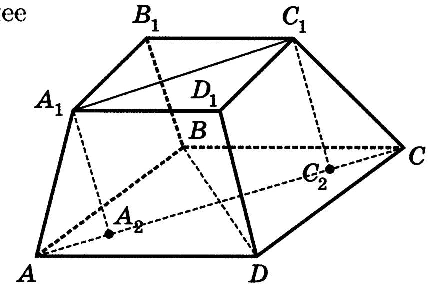
$P_{ABCD} + P_{A_1B_1C_1D_1} = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 10 = 120.$

Тогда на боковые ребра приходится $204 - 120 = 84$.

С другой стороны, $CC_1 > H_{\text{ус.пирамиды}} = 20$.

Таким образом, $4 \cdot CC_1 \leqslant 84$; $\quad CC_1 \leqslant 21$.

Это выглядит правдоподобным, но лучше проверить более тщательно.



Дано:

$AB = 20$

$A_1B_1 = 10$

$H_{ABCDA_1B_1C_1D_1} = 20$

Найдите $P_{\text{ребер}}$.

а) Сделаем дополнительное построение: $C_2C_1 \perp ABCD$. $C_2C_1 = 20$.

б) $AC = 20\sqrt{2}$; $\quad A_1C_1 = 10\sqrt{2}$.

в) $CC_2 = \dfrac{AC - A_1C_1}{2}$; $\quad CC_2 = 5\sqrt{2}$.

г) $CC_1 = \sqrt{C_2C_1^2 + CC_2^2}$;

$CC_1 = \sqrt{20^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$.

д) $P_{\text{ребер}} = 4 \cdot 20 + 4 \cdot 10 + 4 \cdot 15\sqrt{2} = 120 + 60\sqrt{2}$.

Таким образом, чтобы проволоки хватило, требуется выполнение неравенства

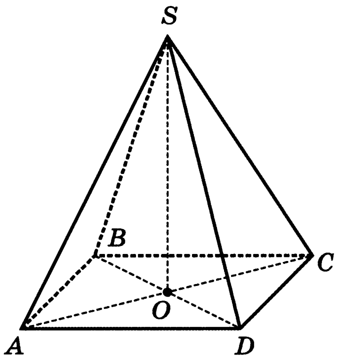
$60\sqrt{2} \leqslant 84 \Leftrightarrow 5\sqrt{2} \leqslant 7 \Leftrightarrow 50 \leqslant 49$ — ложь.

Значит, на каркас такой усеченной пирамиды проволоки длиной 204 см все же не хватит.

7. Нет. Приведем контрпример.

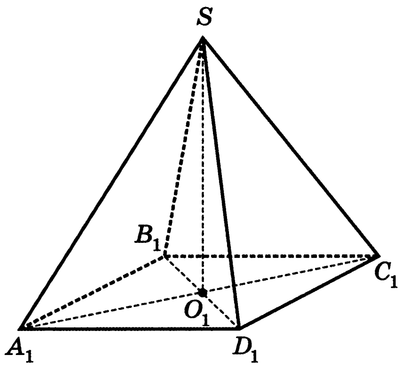
Дано:
$SABCD$ — пирамида
$SO \perp ABCD$; $SO = H$
$AB = BC = DC = AD = a$
$AC \neq BD$

V_{SABCD}.



Дано:
$SA_1B_1C_1D_1$ — пирамида
$SO_1 \perp A_1B_1C_1D_1$;
$SO_1 = H$
$A_1B_1 = B_1C_1 =$
$= D_1C_1 = A_1D_1 = a$
$A_1C_1 = B_1D_1$

$V_{SA_1B_1C_1D_1}$.



Так как $S_{ABCD} \neq S_{A_1B_1C_1D_1}$ ($ABCD$ — ромб, а не квадрат, как $A_1B_1C_1D_1$), то $V_{SABCD} \neq V_{SA_1B_1C_1D_1}$.

8. Нет. Контрпример 1 представлен на чертеже.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — многогранник

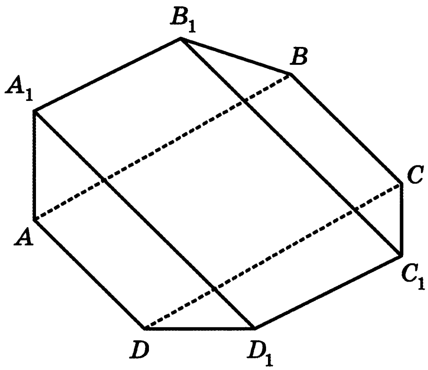
$ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$

$ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники

$\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{D_1C_1}{DC}$

$\dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида?



В данном случае отрицательный ответ очевиден, так как $A_1B_1 < AB$ и $A_1D_1 > AD$, хотя параллельные стороны разных оснований должны быть пропорциональны, здесь это не так.

Контрпример 2 представлен на чертеже.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — многогранник

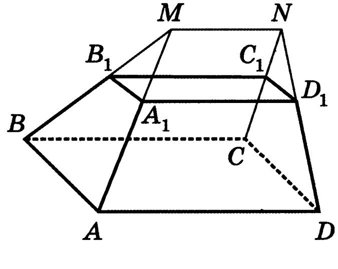
$ABCD \parallel A_1B_1C_1D_1$

$ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольники

$\dfrac{A_1B_1}{AB} = \dfrac{D_1C_1}{DC}$

$\dfrac{A_1D_1}{AD} = \dfrac{B_1C_1}{BC}$

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ — усеченная пирамида?



В данном случае $A_1D_1 < AD$ и $A_1B_1 < AB$,

но в общем случае $\dfrac{A_1B_1}{AB} \neq \dfrac{A_1D_1}{AD}$,

т. е. мы рассматриваем клин, для которого предположение неверно.

Примечание. Любая усеченная пирамида есть часть обычной пирамиды, полученная отсечением плоскостью, параллельной основанию пирамиды, то есть получается в остатке многогранник, две грани которого параллельны и являются подобными многоугольниками. Кроме того, если продолжить боковые ребра, то все они обязательно пересекутся в одной точке. В данной задаче это не так.

Самостоятельная работа 6 (Планиметрия)

Варианты 1–8

1. В треугольнике угол α равен $40°$. Найдите угол между биссектрисами, проведенными из двух других углов.

2. В треугольнике углы, прилежащие к одной из сторон, равны, соответственно, $80°$ и $20°$. Найдите угол между биссектрисой и высотой, проведенными к этой стороне.

3. В треугольнике медианы равны, соответственно, 5, 12 и 13. Найдите наименьшую из сторон и определите вид треугольника.

4. Высоты треугольника равны, соответственно, 15, 21 и 35. Найдите наибольший угол исходного треугольника и его площадь.

5. Длины двух сторон треугольника равны 22 и 10. Найдите длину биссектрисы угла между ними, если площадь треугольника равна $105{,}6$.

6. В треугольник со сторонами длиной 6, 8 и 11 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, чтобы она пересекала две большие стороны и была параллельна меньшей. Найдите периметр отсеченной трапеции.

7. Длины медиан треугольника равны 5, 6 и 5. Найдите его площадь.

8. Площади двух треугольников, прилегающих к основаниям трапеции и ограниченных ее диагоналями, равны 36 и 16. Найдите площадь трапеции.

Самостоятельная работа 7 (Призмы)

Варианты 1–8

1. Все ребра прямой призмы равны между собой, и их длины есть целые числа. Сумма всех длин ребер равна 42. Найдите площадь боковой поверхности такой призмы.
2. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся как $2 : 1 : 2$. Найдите объем параллелепипеда, если его диагональ равна 12.
3. В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция. Диагональные сечения призмы перпендикулярны граням, проходящим через боковые ребра трапеции, и делят острые двугранные углы при боковых ребрах пополам. Вычислите плоские углы двугранных углов при боковых ребрах призмы.
4. В прямом параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 29$, $AD = 36$, $BD = 25$. Боковое ребро $AA_1 = 48$. Найдите площадь сечения AB_1C_1D.
5. Площадь одного из диагональных сечений прямого параллелепипеда равна площади любой из боковых граней. Найдите отношение площадей диагональных сечений с общей осью симметрии.
6. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестигранной призмы равна 25. Найдите площадь боковой поверхности данной призмы.
7. Основанием прямой призмы является ромб с диагоналями, равными 24 и 10. Сечение призмы, параллельное боковому ребру, пересекает противоположные грани перпендикулярно к ним и является квадратом. Найдите $S_{\text{б.п.п}}$.
8. Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересечен четырьмя плоскостями, которые отсекают от него треугольные пирамиды с вершинами в точках A, C, B_1 и D_1. Боковые ребра этих пирамид равны ребрам куба. Какой многогранник ограничен секущими плоскостями и какую часть от объема куба составляет его объем?

Самостоятельная работа 8 (Пирамиды)

Варианты 1–7

1. В правильной четырехугольной пирамиде апофема боковой грани наклонена к плоскости основания под углом в $45°$. Найдите угол между апофемами смежных граней.

2. В правильной пирамиде двугранные углы при основании равны $60°$. Какую часть от площади полной поверхности пирамиды составляет площадь боковой поверхности?

3. Наибольшее по площади диагональное сечение правильной шестиугольной пирамиды есть правильный треугольник, сторона которого равна $2a$. Найдите объем пирамиды.

4. В правильной четырехугольной пирамиде, все ребра которой равны, вершина есть точка пересечения диагоналей параллелепипеда, основание которого совпадает с основанием пирамиды. Определите вид параллелепипеда и найдите, какую часть его объема составляет объем пирамиды.

5. В основании пирамиды лежит прямоугольник со сторонами, равными 6 и 8. Боковые ребра равны 13. Вычислите: а) объем пирамиды; б) радиус описанной сферы.

6. Дана правильная шестиугольная пирамида, сторона основания которой равна $2a$. Высота, равная $3a$, пересечена двумя плоскостями, проходящими через одну из апофем пирамиды и середины двух смежных сторон основания. Определите объем части пирамиды, ограниченной этими плоскостями.

7. Правильная треугольная пирамида, все ребра которой равны, пересечена плоскостью, проходящей через середины трех ее ребер, выходящих из одной вершины. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

Самостоятельная работа 9 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень А, базовый)

1. В прямую призму, в основании которой лежит равнобедренная трапеция с основаниями 8 и 2, вписан цилиндр. Высота призмы равна 10. Найдите:

вариант 1 — площадь боковой поверхности цилиндра;

вариант 2 — объем цилиндра.

2. Сечение цилиндра, проходящего через образующие, находится на расстоянии 3 от оси симметрии цилиндра, радиус основания которого равен 5, а высота 4. Найдите:

вариант 1 — площадь сечения;

вариант 2 — периметр сечения.

3. Около правильной треугольной пирамиды со стороной основания $3\sqrt{3}$ и высотой 3 описан конус. Найдите:

вариант 1 — объем конуса;

вариант 2 — площадь боковой поверхности конуса.

4. Через две образующие конуса проведено сечение под углом в $60°$ к плоскости основания. Высота конуса равна 10. Найдите:

вариант 1 — расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения;

вариант 2 — площадь сечения, если проекция сечения на плоскость основания есть прямоугольный треугольник.

5. Конус пересекает плоскость, параллельная основанию и проходящая через $\frac{3}{5}$ высоты конуса. Найдите:

вариант 1 — отношение площади основания конуса к площади сечения;

вариант 2 — какой процент площади основания составляет площадь сечения?

Самостоятельная работа 10 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень В)

Варианты 1–8

1. На поверхности шара заданы три точки, кратчайшее расстояние между которыми равно 6. Найдите площадь сечения шара плоскостью, проходящей через через эти три точки.

2. В сферу радиуса R вписана правильная четырехугольная пирамида, все ребра которой равны между собой. Найдите объем пирамиды.

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, касающийся всех ее боковых ребер и плоскости основания. Диагональное сечение пирамиды есть правильный треугольник со сторонами, равными a. Найдите радиус такого шара.

4. В сферу вписан равносторонний цилиндр. Найдите отношение площадей поверхностей этих тел.

5. В сферу вписан равносторонний конус, а в этот конус вписана сфера. Найдите отношение площадей поверхностей этих тел.

6. Шар радиуса R пересечен двумя параллельными плоскостями, которые делят диаметр шара в отношении $1:2:3$. Найдите площадь поверхности шара, заключенную между секущими плоскостями.

7. Дуга сегмента в осевом сечении шарового сектора равна 240°. Определите площадь сферической поверхности сектора, если ее радиус равен R.

8. Определите объем сегмента, который отсекается от шара радиуса R плоскостью, делящей диаметр шара в отношении $1:3$.

Самостоятельная работа 11 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень B)

Варианты 1–5

1. Около сферы радиуса 2 описана правильная четырехугольная пирамида, косинус плоского угла при вершине которой равен 0,6. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Боковые ребра треугольной пирамиды равны $2\sqrt{33}$, а стороны основания равны $\sqrt{33}$. Найдите радиус вписанной в пирамиду сферы.

3. Найдите радиус описанной около треугольной пирамиды сферы, если боковые ребра равны $2\sqrt{11}$, а стороны основания равны $\sqrt{11}$.

4. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна $\sqrt{3}$ и образует с плоскостью боковой грани угол в $45°$. Найдите объем призмы.

5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если боковая грань находится на расстоянии 3 от вершины основания.

Самостоятельная работа 12 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень B)

Вариант 1

1. В цилиндр вписан конус. Основания этих фигур совпадают. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом в 75°. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, если площадь боковой поверхности конуса равна $6\sqrt{6}$.

2. Радиус основания конуса в 5 раз меньше образующей. Найдите угол развертки конуса.

Вариант 2

1. В правильную треугольную пирамиду вписан равносторонний цилиндр (осевое сечение цилиндра — квадрат). Двугранные углы при сторонах основания пирамиды равны 60°. Высота пирамиды равна 5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра.

2. Найдите образующую конуса, радиус основания которого равен 2, а угол развертки — 72°.

Вариант 3

1. В конус вписана правильная треугольная призма, ребра которой равны 3. Найдите площадь боковой поверхности конуса, если осевое сечение конуса — равносторонний треугольник.

2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны. Высота усеченного конуса равна 10. Найдите образующую усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равна 30π.

Вариант 4

1. В цилиндр вписан параллелепипед. Большая сторона его основания равна $4\sqrt{2}$. Диагональ параллелепипеда образует с плоскостью большой боковой грани угол в 30° и равна 8. Найдите объем параллелепипеда.

2. Сечение конуса, проходящего через вершину, есть равносторонний треугольник и образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите объем конуса, если его высота равна 3.

Вариант 5

1. В правильную четырехугольную пирамиду вписан конус с высотой 3. Найдите объем конуса, если расстояние между серединами двух апофем смежных граней пирамиды равно 4.

2. Образующая усеченного конуса наклонена к плоскости основания под углом в 60°. В осевое сечение усеченного конуса вписан круг радиуса 3. Найдите объем конуса.

Вариант 6

1. Правильная треугольная пирамида вписана в конус. Найдите объем конуса, если сторона основания пирамиды равна $2\sqrt{3}$, а ее боковая грань наклонена к плоскости основания под углом 60°.

2. В цилиндре отрезок, соединяющий точки окружностей верхнего и нижнего основания, равен 4 и наклонен к плоскости основания под углом в 30°. Найдите объем цилиндра, если проекция этого отрезка на плоскость основания видна из центра этого основания под углом в 60°.

Вариант 7

1. Объем усеченного конуса, у которого радиусы основания равны 2 и 11, равен объему конуса той же высоты. Найдите радиус основания этого конуса.

2. Развертка боковой поверхности конуса составляет 60% площади круга. Найдите площадь боковой поверхности конуса, высота которого равна 2.

Вариант 8

1. Стороны треугольника равны 6, 25 и 29. Найдите площадь поверхности тела, образованного вращением данного треугольника вокруг прямой, принадлежащей плоскости треугольника. При этом меньшая сторона параллельна оси вращения и удалена от нее на 30.

2. В треугольную пирамиду, площади боковых граней которой относятся как $5 : 6 : 7$, вписан конус. В каком отношении линия касания поверхностей пирамиды конусом делит боковую поверхность пирамиды?

Самостоятельная работа 13 (Комбинированная работа. Уровень С)

Вариант 1

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

2. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD:DC = 1:2$. Медиана CM пересекает отрезок AD в точке K. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AMK?

Вариант 2

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = 8$, $AB = 6$ и $BC = 15$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CK, при этом $AC = 6$, $AK = 2$, $CD = 3$. Найдите длину отрезка DK.

Вариант 3

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$. Найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

2. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Вариант 4

1. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 4$, $BC_1 = 6$, $CC_1 = 4$. Найдите тангенс угла между плоскостью ABC и прямой MK, проходящей через середины ребер AA_1 и C_1D_1.

2. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырехугольника $ABOD$.

Самостоятельная работа 14 (Пирамиды. Уровень С)

Вариант 1

1. Основание пирамиды — треугольник со сторонами, равными 4, 13 и 15. Боковое ребро, проходящее через вершину меньшего угла основания, перпендикулярно плоскости основания. Одна из боковых граней образует с плоскостью основания угол в 45°. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь полной поверхности.

2. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами, равными 15, 16 и 17. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами, равными 8 и 15, а угол между ними равен 60°. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы, равные 45°. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь боковой поверхности.

2. Боковые ребра пирамиды равны 65. В трапеции основания параллельные стороны равны 50 и 14, а боковые стороны — 30. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3

1. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами, равными 7 и 8, а угол между ними равен 120°. Двугранные углы при сторонах основания равны 60°. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь боковой поверхности.

2. Боковые ребра пирамиды равны 25. Стороны основания равны 18, 18, 24 и 24. Найдите объем пирамиды.

Вариант 4

1. Основанием пирамиды является треугольник со сторонами, равными 32, 34 и 34. Периметры соответствующих боковых граней равны 162, 150 и 150. Найдите: а) объем пирамиды; б) площадь полной поверхности.

2. Вершина пирамиды равноудалена от вершин основания на 65. Стороны основания равны последовательно 14, 30, 40 и 48. Найдите объем пирамиды.

Карточки индивидуальных заданий

Карточка 1

1. В конус вписана полусфера, большой круг которой лежит на основании конуса. Найдите тангенс угла при вершине конуса, если площадь полной поверхности конуса относится к площади боковой поверхности полусферы как $18:5$.

2. Правильная четырехугольная пирамида со стороной основания, равной a, и двугранным углом при основании, равным 60°, пересечена плоскостью, делящей пополам двугранный угол при основании. Найдите площадь сечения.

Карточка 2

1. В шар радиуса 2 вписан конус, боковая поверхность которого в два раза больше площади основания. Найдите объем конуса.

2. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен 30°, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно 2. Найдите объем этой пирамиды.

Карточка 3

1. Через вершину конуса проведена плоскость под углом 45° к основанию конуса. Эта плоскость пересекает основание по хорде a, стягивающей дугу в 30° в основании конуса. Найдите объем конуса.

2. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен 3 и образует с одним из катетов угол в 30°. Найдите объем призмы.

Карточка 4

1. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении $1 : 3$. Зная, что площадь первого сечения равна S, найдите площадь второго.

2. Отношение высоты конуса к радиусу описанного около него шара равно $2 : 3$. Найдите отношение объема шара к объему конуса.

Карточка 5

1. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2, угол между боковыми гранями равен $75°$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 7, а боковое ребро — 14. Через середину бокового ребра перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь получившегося сечения.

Карточка 6

1. Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника, причем секущая плоскость делит три боковых ребра, сходящихся в одной вершине, в отношении $1 : 2$, $1 : 2$ и $2 : 1$. Найдите отношение объемов полученных многогранников.

2. Около правильной треугольной призмы описан шар, а около него описана правильная треугольная призма. Найдите отношение площади основания большей призмы к площади основания меньшей, если призмы подобны.

Карточка 7

1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 5, высота пирамиды равна 4. Через сторону основания пирамиды и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Найдите расстояние от вершины пирамиды до плоскости этого сечения.

2. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 10, каждое боковое ребро пирамиды образует с плоскостью основания угол в 15°. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

Карточка 8

1. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями, равными $BD = 6$ и $AC = 12$. Боковое ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно 5. Через точку A и середину ребра SC проведена плоскость, параллельная BD. Найдите площадь сечения.

2. В правильной треугольной пирамиде высота, опущенная на основание, равна 6, а расстояние от центра основания до боковой грани равно 4. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду.

Карточка 9

1. Косинус угла между соседними боковыми ребрами правильной четырехугольной пирамиды равен 0,25. Радиус сферы, описанной около этой пирамиды, равен 10. Найдите длину бокового ребра пирамиды.

2. Основание пирамиды — равнобедренная трапеция с основаниями, равными 4 и 9. Все двугранные углы при основании пирамиды равны между собой. Большее боковое ребро равно 7,5. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

Карточка 10

1. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат со стороной 4. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания и равно $6\sqrt{2}$. Через вершину A параллельно диагонали основания BD проведено сечение, которое делит ребро SC в отношении $2:1$ считая от вершины S. Найдите площадь полученного сечения.

2. Расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных граней куба равно 2. Найдите площадь полной поверхности куба.

Карточка 11

1. Правильный тетраэдр с ребром, равным 9, рассекли плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам и удаленной от одного из них вдвое больше, чем от другого. Найдите площадь сечения.

2. Длины боковых ребер треугольной пирамиды равны $2\sqrt[3]{3}$. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине, два равны $45°$, а один — $60°$. Найдите объем пирамиды.

Карточка 12

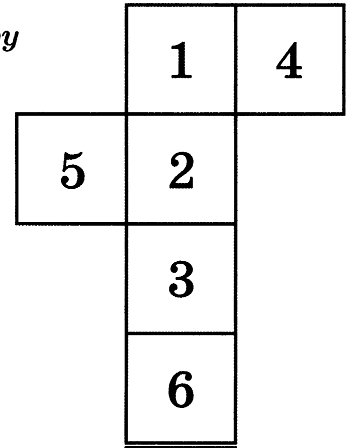
1. В основании пирамиды лежит квадрат. Величины двугранных углов при основании пирамиды относятся как $1:2:4:2$. Найдите наименьший из этих углов.

2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, сторона которого равна $\frac{4}{3}\sqrt[4]{3}$, проведена плоскость перпендикулярно диагонали куба AC_1. Расстояние от точки A до плоскости сечения равно $\frac{2}{3}\sqrt[4]{27}$. Найдите площадь сечения.

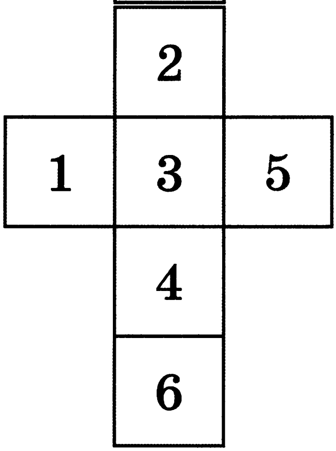
Ответы

Ответы на практикум-игру

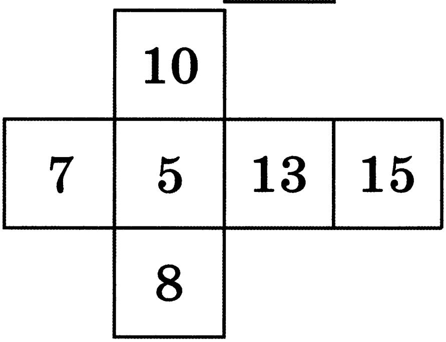
1. а) 1. Левая — 5;
верхняя — 6;
задняя — 3.
2. Левая — 1;
верхняя — 4;
задняя — 6.
3. Левая — 5;
верхняя — 3;
задняя — 2.



б) 1. Задняя — 6;
нижняя — 4;
правая — 5.
2. Задняя — 2;
нижняя — 1;
правая — 6.
3. Задняя — 4;
нижняя — 1;
правая — 3.



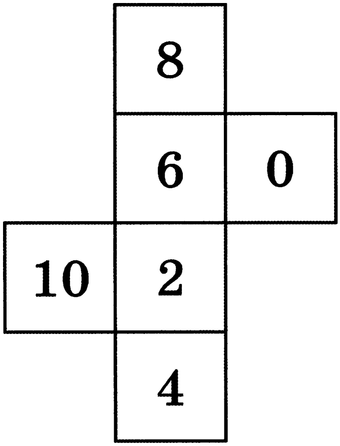
в) 1. Задняя — 13;
верхняя — 8;
правая — 15.
2. Задняя — 10;
верхняя — 15;
правая — 7.
3. Задняя — 7;
верхняя — 8;
правая — 5.



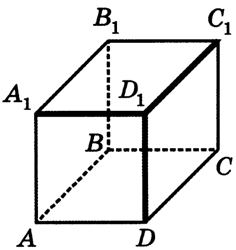
г) 1. Левая — 10;
задняя — 4;
нижняя — 2.

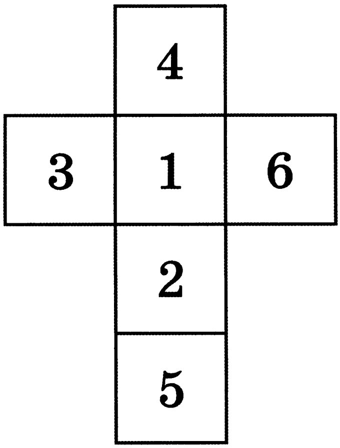
2. Задняя — 4;
верхняя — 10;
правая — 8.

3. Левая — 8;
верхняя — 6;
задняя — 0.



д) Один из вариантов:





$3 \in AA_1B_1B$;

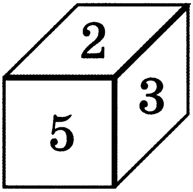
$4 \in A_1B_1C_1D_1$;

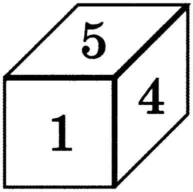
$1 \in AA_1D_1D$;

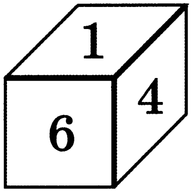
$6 \in DD_1C_1C$;

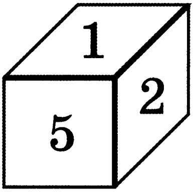
$2 \in ABCD$;

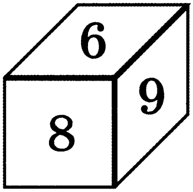
$5 \in BB_1C_1C$.

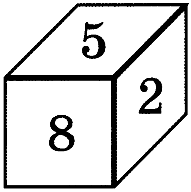
2. а) 1. 

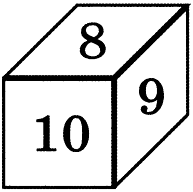
2. 

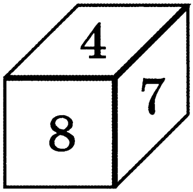
3. 

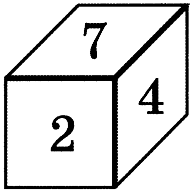
б) 1. 

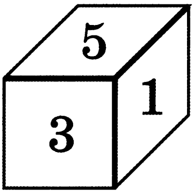
2. 

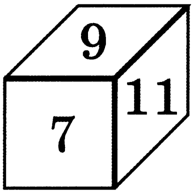
3. 

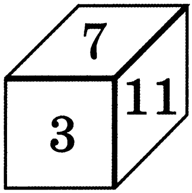
в) 1. 

2. 

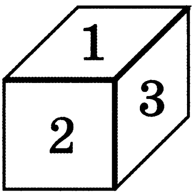
3. 

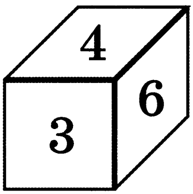
г) 1. 

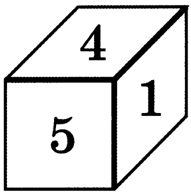
2. 

3. 

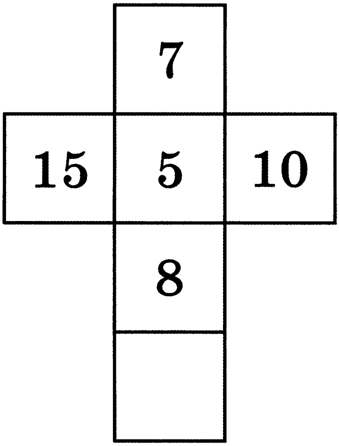
д) Один из возможных вариантов:

1. 

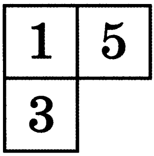
2. 

3. 

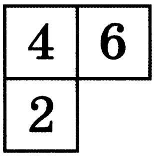
3. а) Представленная развертка составлена по изображениям 1 и 3, но изображение 2 предполагает, что грани $\boxed{15}$ и $\boxed{10}$ — смежные, а это не так. Следовательно, такое распределение цифр ни на одном кубе невозможно.



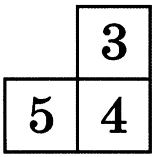
б) 1.

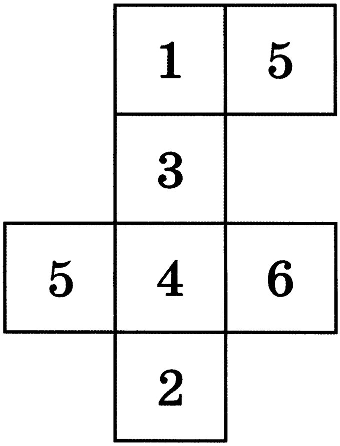


2.



3.





Так представлены изображения цифр на кубе.

Очевидно, что такое распределение цифр на одном кубе без повторения невозможно.

Стереометрия. Самостоятельные работы

Домашняя самостоятельная работа

1. а) $\boxed{84{,}5\sqrt{3}}$; б) $\boxed{5:12}$. **2.** а) $\boxed{64\sqrt{15}}$; б) $\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$.

3. а) $\boxed{\sqrt{3}:3}$; б) $\boxed{\dfrac{122}{125}=0{,}976}$. **4.** а) $\boxed{a^2\sqrt{15}}$; б) $\boxed{\frac{1}{4}a^2\sqrt{15}}$.

5. а) $\boxed{4a^2\sqrt{3}}$; б) $\boxed{a\sqrt{3}}$; в) $\boxed{45^\circ}$. **6.** а) $\boxed{2}$; б) $\boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$.

Самостоятельная работа 1 (Пирамиды)

Вариант 1

1. а) $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$; б) $\boxed{\dfrac{\sqrt{13}}{5}}$. **2.** $\boxed{84\sqrt{15}}$. **3.** а) $\boxed{90^\circ}$; б) $\boxed{30^\circ}$.

Вариант 2

1. а) $\boxed{\frac{8}{9}\sqrt{3}}$; б) $\boxed{\dfrac{\sqrt{73}}{10}}$. **2.** $\boxed{15\sqrt{15}}$. **3.** а) $\boxed{90^\circ}$; б) $\boxed{45^\circ}$.

Векторы. Самостоятельные работы

Самостоятельная работа 2

1.	а)	б)	в)	г)	д)	е)	ж)
Вариант 1	$\overrightarrow{AD_1}$	$\overrightarrow{CP_4}$	$\overrightarrow{CA_1}$	$\overrightarrow{D_1B}$	$\overrightarrow{AC_1}$	$\overrightarrow{AT_3}$	$\overrightarrow{K_4C_1}$
Вариант 2	$\overrightarrow{C_1A}$	$\overrightarrow{CT_1}$	$\overrightarrow{CA_1}$	$\overrightarrow{AC_1}$	$\overrightarrow{B_1D}$	$\overrightarrow{B_1K_3}$	$\overrightarrow{T_2D}$

2.	а)	б)	в)
Вариант 1	$\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}$	$\vec{b}-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$	$-\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}$
Вариант 2	$-\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$	$-\vec{c}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$	$\frac{1}{2}\vec{c}-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$

Самостоятельная работа 3

1. $\boxed{\frac{5}{14}\sqrt{7}}$. **2.** $\boxed{\frac{11}{14}}$. **3.** $\boxed{-\frac{2}{7}}$, т. е. $\left(\widehat{\overrightarrow{CP};\overrightarrow{AT}}\right) \in (90^\circ; 180^\circ)$.

4. $\boxed{-\frac{5}{6}}$. **5.** а) $\boxed{90^\circ}$; б) $\boxed{\frac{2}{3}}$. **6.** а) $\boxed{180^\circ}$; б) $\boxed{\frac{4}{9}}$. **7.** $\boxed{\frac{3}{65}\sqrt{65}}$.

Самостоятельная работа 4

Вариант 1. а) $\cos\left(\widehat{FE_1; ED_1}\right) = \frac{11}{13}$; б) $\rho(B; FE_1) = 4\sqrt{3}m$.

Вариант 2. а) $\left(\widehat{A_1P; NA}\right) = 60^\circ$; б) $\rho(N; BD_1) = \frac{1}{2}m$.

Вариант 3. а) $\cos(TE_1; PA_1) = \frac{11}{32}$; б) $\rho(FF_1; NT) = 3{,}5m$.

Вариант 4.

а) $\cos(FK; B_1T) = \frac{29}{32}$; б*) $\rho(FK; B_1T) = \frac{9}{13}\sqrt{13}$.

Карточки самоконтроля

1. $\boxed{180}$ **2.** $\boxed{9}$ **3.** $\boxed{207}$ **4.** $\boxed{12}$ **5.** $\boxed{24}$ **6.** $\boxed{115}$ **7.** $\boxed{83}$
8. $\boxed{431}$ **9.** $\boxed{41}$ **10.** $\boxed{139}$ **11.** $\boxed{282}$ **12.** $\boxed{36}$ **13.** $\boxed{26}$
14. $\boxed{30}$ **15.** $\boxed{1}$ **16.** $\boxed{48}$

Самостоятельная работа 5

Уровень А

1. $\boxed{-4}$ **2.** $\boxed{-2}$ **3.** $\boxed{40}$ **4.** $\boxed{\dfrac{3\pi}{4}}$ **5.** $\boxed{-61}$

6. $\boxed{\{-24; 32; 30\}}$ **7.** $\boxed{\{-4; -6; 12\}}$ **8.** $\boxed{\{5; 12; -16\}}$

Уровень В

1. $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(3a^2 + b^2 - c^2\right)}$ **2.** $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(a^2 + 3b^2 - c^2\right)}$ **3.** б) $\boxed{y = 1 + x}$

Уровень С

1. $\boxed{0}$ **2.** $\boxed{0}$ **3.** $\boxed{0}$ **4.** $\boxed{0}$

Повторение

Самостоятельная работа 6 (Планиметрия)

1. $\boxed{70^\circ}$, $\boxed{\left(\dfrac{180^\circ - \alpha}{2}\right)}$ **2.** $\boxed{30^\circ}$, $\boxed{\left(\dfrac{\alpha - \beta}{2}\right)}$

3. $\boxed{8\frac{2}{3}\text{, тупоугольный}}$ **4.** $\boxed{120^\circ}$, $\boxed{980\sqrt{3}}$ **5.** $\boxed{8{,}25}$, $\boxed{11}$

6. $\boxed{18{,}24}$ **7.** $\boxed{16}$ **8.** $\boxed{100}$

Самостоятельная работа 7 (Призмы)

1. $\boxed{14}$ **2.** $\boxed{256}$ **3.** $\boxed{60^\circ;\ 120^\circ}$ **4.** $\boxed{1872}$ **5.** $\boxed{1 : \sqrt{3}}$ **6.** $\boxed{75}$

7. $\boxed{480}$ **8.** $\boxed{\text{Тетраэдр, } \frac{1}{3}}$

Самостоятельная работа 8 (Пирамиды)

1. $\boxed{60^\circ}$ **2.** $\boxed{\frac{2}{3}}$ **3.** $\boxed{1{,}5a^3}$ **4.** $\boxed{\text{Прямоугольник, } \frac{1}{6}}$

5. $\boxed{192,\ 7\frac{1}{24}}$ **6.** $\boxed{1{,}5a^3}$ **7.** $\boxed{1 : 7}$

Самостоятельная работа 9 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень А, базовый)

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Вариант 1	40π	32	9π	5	25 : 4
Вариант 2	40π	24	$9\sqrt{2}\pi$	$66\frac{2}{3}$	16%

Самостоятельная работа 10 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень В)

1. $\boxed{12\pi}$ **2.** $\boxed{\frac{2}{3}R^3}$ **3.** $\boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}a}$ **4.** $\boxed{4 : 3}$ **5.** $\boxed{4 : 1}$ **6.** $\boxed{\frac{4}{3}\pi R^2}$

7. $\boxed{3\pi R^2}$ **8.** $\boxed{\frac{5}{24}\pi R^3}$

Самостоятельная работа 11 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень В)

1. $\boxed{16\left(3+2\sqrt{3}\right)}$ **2.** $\boxed{3{,}75}$ **3.** $\boxed{2\sqrt{3}}$ **4.** $\boxed{2}$ **5.** $\boxed{24}$

Самостоятельная работа 12 (Комбинации тел вращения и многогранников. Уровень В)

Вариант 1. 1. $\boxed{36}$; **2.** $\boxed{72^\circ}$.
Вариант 2. 1. $\boxed{150\pi\left(7-4\sqrt{3}\right)}$; **2.** $\boxed{10}$.
Вариант 3. 1. $\boxed{24\pi}$; **2.** $\boxed{3}$.
Вариант 4. 1. $\boxed{48\pi}$; **2.** $\boxed{15\pi}$.
Вариант 5. 1. $\boxed{32\pi}$; **2.** $\boxed{78\pi}$.
Вариант 6. 1. $\boxed{\frac{4}{3}\sqrt{3}}$; **2.** $\boxed{8\pi}$.
Вариант 7. 1. $\boxed{7\sqrt{3}}$; **2.** $\boxed{3{,}75\pi}$.
Вариант 8. 1. $\boxed{4680\pi;\ 2520\pi}$; **2.** $\boxed{2:3:4}$.

Самостоятельная работа 13 (Комбинированная работа. Уровень С)

Вариант 1. 1. $\boxed{\arcsin\frac{12}{25}}$; **2.** $\boxed{0{,}1}$.
Вариант 2. 1. $\boxed{\arcsin\frac{24}{85}}$; **2.** $\boxed{\sqrt{5{,}8}}$.
Вариант 3. 1. $\boxed{0{,}6}$; **2.** $\boxed{\frac{5}{4}\sqrt{3};\ \frac{13\sqrt{3}}{6}}$.
Вариант 4. 1. $\boxed{\frac{\sqrt{10}}{10}}$; **2.** $\boxed{\frac{10}{3}\sqrt{3};\ \frac{11}{2}\sqrt{3}}$.

Самостоятельная работа 14 (Пирамиды. Уровень С)

Вариант 1. 1. а) $\boxed{96}$; б) $\boxed{24\left(\sqrt{2}+8\right)}$. **2.** $\boxed{340}$.
Вариант 2. 1. а) $\boxed{50}$; б) $\boxed{50\left(\sqrt{6}+\sqrt{3}\right)}$. **2.** $\boxed{15\,360}$.
Вариант 3. 1. а) $\boxed{14\sqrt{3}}$; б) $\boxed{42\sqrt{3}}$. **2.** $\boxed{2880}$.
Вариант 4. 1. а) $\boxed{8064}$; б) $\boxed{24\left(5\sqrt{205}+62\right)}$. **2.** $\boxed{18\,720}$.

Карточки индивидуальных заданий

Карточка 1. 1. $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}}$. **2.** $\boxed{\frac{3}{8}a^2\sqrt{3}}$.

Карточка 2. 1. $\boxed{3\pi}$. **2.** $\boxed{2\frac{2}{3}}$.

Карточка 3. 1. $\boxed{\frac{a^3\left(7+4\sqrt{3}\right)}{6}}$. **2.** $\boxed{36\left(\sqrt{3}-1\right)}$.

Карточка 4. 1. $\boxed{\frac{11}{12}S}$. **2.** $\boxed{6{,}75}$.

Карточка 5. 1. $\boxed{\frac{3}{2}\sqrt{2\sqrt{3}-2}}$. **2.** $\boxed{2\sqrt{11}}$.

Карточка 6. 1. $\boxed{2:25}$. **2.** $\boxed{5}$.

Карточка 7. 1. $\boxed{\frac{40}{17}}$. **2.** $\boxed{10}$.

Карточка 8. 1. $\boxed{13}$. **2.** $\boxed{2{,}4}$.

Карточка 9. 1. $\boxed{10}$. **2.** $\boxed{117}$.

Карточка 10. 1. $\boxed{10\frac{2}{3}}$. **2.** $\boxed{72}$.

Карточка 11. 1. $\boxed{18}$. **2.** $\boxed{2}$.

Карточка 12. 1. $\boxed{30^\circ}$. **2.** $\boxed{4}$.

Содержание

Учебное издание

Шахмейстер Александр Хаймович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ЭКЗАМЕНАХ
ЧАСТЬ 2. СТЕРЕОМЕТРИЯ
ЧАСТЬ 3. ВЕКТОРЫ

Научный редактор серии *А.В. Семенов*
Компьютерная графика *Н.Н. Сердюкова*
Компьютерный набор *К.В. Шевяков*
Компьютерная верстка *С.С. Афонин*
Корректоры *Е.Г. Никитина, С.С. Афонин*

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Подписано к печати 20.07.2012 г. Формат 60x90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 30,5 печ. л. Тираж 3000 экз. Заказ №

Отпечатано в ОАО «Первая образцовая типография»,
филиал «Дом печати — ВЯТКА» в полном соответствии с качеством предоставленных оригиналов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122. Факс (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: order@gipp.kirov.ru

Издание напечатано по технологии
Print-on-Demand (печать по требованию)
в одном экземпляре, по индивидуальному заказу.

0 000339 607000

Перед вами серия книг практически по всем разделам школьного курса математики.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам.

Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги для дифференцированной работы с учениками различного уровня подготовки.

Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг начиналась уже с 7, 8 класса и была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Б. Г. Зив.

Серия «МАТЕМАТИКА · ЭЛЕКТИВНЫЕ КУРСЫ»

1. Дроби.
2. Корни.
3. Уравнения.
4. Дробно-рациональные неравенства.
5. Системы уравнений.
6. Иррациональные уравнения и неравенства.
7. Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
8. Логарифмы.
9. Тригонометрия.
10. Построение графиков функций элементарными методами.
11. Уравнения и неравенства с параметрами.
12. Задачи с параметрами на экзаменах.
13. Введение в математический анализ.
14. Комплексные числа.
15. Комбинаторика. Статистика. Вероятность.
16. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 1. Планиметрия.
17. Геометрические задачи на экзаменах. Часть 2. Стереометрия. Часть 3. Векторы.

ISBN 9785987120989

9 785987 120989